OSVALDO DOLCE
JOSÉ NICOLAU POMPEO

COMPLEMENTO PARA
O PROFESSOR

FUNDAMENTOS DE
MATEMÁTICA 10 ELEMENTAR

GEOMETRIA ESPACIAL
Posição e métrica

ATUAL
EDITORA

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2000.
Av. Marquês de São Vicente, 1697 — Barra Funda
01139-904 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3613-3000
Fax: (0xx11) 3611-3308 — Fax Vendas: (0xx11) 3611-3268
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Fundamentos de matemática elementar : complemento para o professor. — São Paulo: Atual, 1993.

Conteúdo: v. 1. Conjuntos e funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami. — v. 2. Logaritmos / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Carlos Murakami. — v. 3. Trigonometria / Gelson Iezzi. — v. 4. Seqüências, matrizes, determinantes, sistemas / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan. — v. 5. Combinatória, probabilidade / Samuel Hazzan. — v. 6. Complexos, polinômios, equações — v. 7. Geometria analítica / Gelson Iezzi. — v. 8. Limites, derivadas, noções de integral — Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado. — v. 9. Geometria plana — v. 10. Geometria espacial : posição e métrica / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo.

1. Matemática (2.º grau) 2. Matemática (2.º grau) — Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Iezzi, Gelson, 1939- II. Murakami, Carlos, 1943- III. Dolce, Osvaldo, 1938- IV. Hazzan, Samuel, 1946- V. Machado, Nilson José, 1947- VI. Pompeo, José Nicolau, 1945-

93-1795 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino de 2.º grau 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar 10

Editora: Bárbara Ferreira Arena
Editor de campo: Valdir Montanari
Coordenadora editorial: Sandra Lucia Abrano
Chefe de preparação de texto e revisão: Noé Ribeiro
Coordenadora de revisão: Maria Luiza Xavier Souto
Revisores: Alice Kobayashi
Magna Reimberg Teobaldo
Maria Cecília Fernandes Vannucchi
Maria da Penha Faria
Vera Lúcia Pereira Della Rosa
Editor de arte: Zildo Braz
Chefe de arte: Glair Alonso Arruda
Assistentes de arte: Lu Bevilacqua Ghion
Ricardo Yorio
Rosi Meire Martins Ortega
Gerente de produção: Antonio Cabello Q. Filho
Coordenadora de produção: Silvia Regina E. Almeida
Produção gráfica: José Rogerio L. de Simone
Maurício T. de Moraes
Capa: Ettore Bottini
Foto de capa: Hilton Ribeiro
Consultores técnicos: Arnaldo Bento Rodrigues
Carlos N. C. de Oliveira
Luiz Belloni Jr.
Sonia Regina Cavallini
Fotolito: Binhos/Priscor
Composição e arte-final: Paika Realizações Gráficas

Visite nosso *site*: www.atualeditora.com.br
Central de atendimento ao professor: (0xx11) 3613-3030

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 10, Geometria espacial (posição e métrica), da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos aos professores Arnaldo Bento Rodrigues, Carlos N. C. de Oliveira, Luiz Belloni Jr., Roberto Périgo e Sonia Regina Cavallini a colaboração na redação de soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

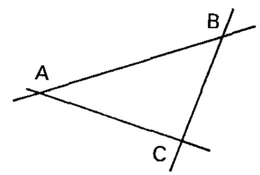
Sumário

Capítulo I – Introdução

Conceitos primitivos e postulados

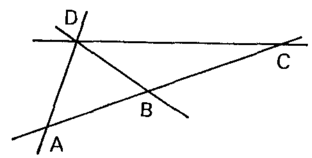
1. Resolvido.

2. Infinitas.

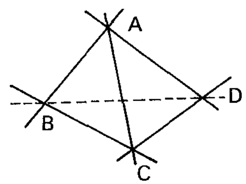


Justificação
Consideremos dois pontos distintos do espaço A e B. Esses pontos determinam uma reta r. Consideremos um ponto C do espaço, fora de r. Os pontos A e C determinam uma reta s e os pontos B e C determinam uma reta t. Desse modo, podemos construir "tantas retas quantas quisermos", isto é, construímos "infinitas" retas.

3. a) A, B e C são colineares.
Temos 3 retas, a saber:
$\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{CD}$, e a reta que passa por A, B e C.

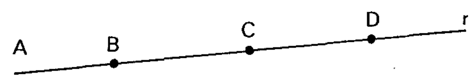


b) A, B, C e D não são coplanares.
Temos 6 retas, a saber:
$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.



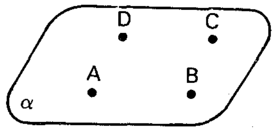
4. Temos três possibilidades:

1ª) os pontos são colineares: $A \in r$, $B \in r$, $C \in r$, $D \in r$



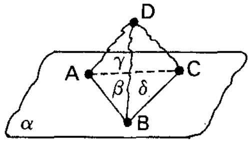
Neste caso os pontos *não* determinam plano, mas por eles passam infinitos planos.

2ª) os pontos são coplanares: $\alpha = (A, B, C)$; $D \in \alpha$



Neste caso os pontos determinam *um só* plano, que é o plano α.

3ª) os pontos não são coplanares: $\alpha = (A, B, C)$; $D \notin \alpha$



Neste caso os pontos determinam *quatro* planos:
$\alpha = (A, B, C)$, $\beta = (A, B, D)$, $\gamma = (A, C, D)$ e $\delta = (B, C, D)$.

5. Resolvido.

6. As pontas das pernas de uma mesa de 3 pernas determinam um único plano, que coincide com o plano do piso.
As pontas das pernas de uma mesa de 4 pernas podem determinar quatro planos distintos.

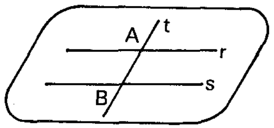
Determinação de plano

7. Resolvido.

8. Infinitos.

Justificação
Dois pontos distintos determinam uma reta à qual eles pertencem e por essa reta passam infinitos planos.

9. *Demonstração*
r e *s* são paralelas distintas
t é concorrente com *r* e com *s*

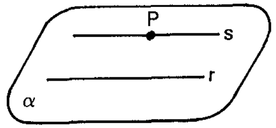


$r \cap t = \{A\}$ $\quad s \cap t = \{B\}$
$(r \neq s, r \,//\, s) \Rightarrow \alpha = (r, s)$

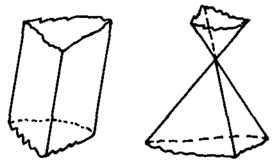
$$\left.\begin{matrix}(\alpha = (r, s), A \in r) \Rightarrow A \in \alpha \\ (\alpha = (r, s), B \in s) \Rightarrow B \in \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \Rightarrow t \subset \alpha$$

10. Resolvido.

11. Seja α o plano (r, P).
As retas distintas *r* e *s* são paralelos.
Seja α' o plano (r, s).
$(\alpha' = (r, s), P \in s) \Rightarrow \alpha' = (r, P) \Rightarrow \alpha' = \alpha$
Se $\alpha' = \alpha$ e $r \subset \alpha'$, então $s \subset \alpha$.



12. a) F, pois eles podem ser colineares.
b) F, pois o ponto pode pertencer à reta.
c) F, pois a concorrente está contida no plano das paralelas.
d) V
e) V



13. Resolvido.

14. *Demonstração* (pelo método indireto)
ABCD é um paralelogramo $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \exists\, \alpha \mid \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha, \overleftrightarrow{CD} \subset \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha, D \in \alpha$ (o que é *absurdo*, pois *ABCD* é um quadrilátero reverso).
Logo, *ABCD* não é paralelogramo.

15. *Demonstração* (pelo método indireto)
As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ não são reversas $\Rightarrow \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são coplanares $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \alpha \mid \alpha = (\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}) \Rightarrow A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha, D \in \alpha$. (E isso é *absurdo*, pois *ABCD* é um quadrilátero reverso.)
Logo, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são reversas.

16. Não são obrigatoriamente reversas.
Podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.

17. Resolvido.

18. a) V b) V
c) F, pois elas podem ser reversas.
d) V (Elas têm ou não têm pontos comuns. Se tem, a classificação é *V*.)
e) V

f) F, pois elas podem ser coincidentes.
g) V
h) F, pois elas podem ser paralelas.
i) F, pois elas podem ser concorrentes.
j) F, pois elas podem ser reversas.
k) F, pois elas podem ser paralelas.
l) V m) V

19. a) F, pois r e s podem ser paralelas.
b) V
c) F, pois r e s podem ser reversas.
d) V e) V
f) F, pois r e s podem ser paralelas.
g) V
h) F, pois r e s podem ser reversas.

Interseção de planos

20. a) V b) V
c) F, pois eles podem ser coincidentes.
d) V
e) F, pois a interseção deles é uma reta.
f) V g) V h) V

21. Resolvido.

22. Existe um ponto O tal que $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{O\}$ e assim recaímos no exercício anterior.

23. Resolvido.

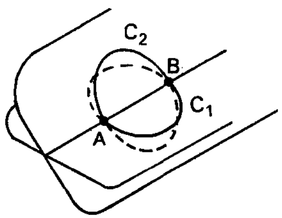
24. $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{RS}$

Justificação

$$\left.\begin{array}{l} R \in r,\ r \subset \alpha \Rightarrow R \in \alpha \\ \beta = (s, R) \Rightarrow R \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow R \in \alpha \cap \beta$$

Analogamente, $S \in \alpha \cap \beta$ $\Rightarrow \alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{RS}$

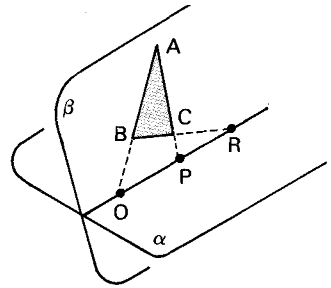
25. As circunferências distintas C_1 e C_2 têm um diâmetro comum $\overline{AB}$; então:
$C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$
(a interseção é um conjunto de 2 pontos).



26. $\overleftrightarrow{AB} \cap \alpha = \{O\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \alpha = \{P\}$ e $\overleftrightarrow{BC} \cap \alpha = \{R\}$.
Seja $\beta = (A, B, C)$ e $i = \alpha \cap \beta$.

$$\left.\begin{array}{l} O \in \overleftrightarrow{AB},\ \overleftrightarrow{AB} \subset \beta \Rightarrow O \in \beta \\ \overleftrightarrow{AB} \cap \alpha = \{O\} \Rightarrow O \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow O \in i$$

Analogamente, temos $P \in i$ e $R \in i$.
Como O, P e R pertencem a i e i é única, segue que O, P e R são colineares.

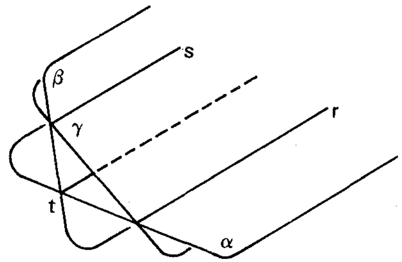


27. Resolvido.

28. Resolvido.

29. $\alpha \cap \beta = t$, $\alpha \supset r$, $\beta \supset s$, $r // s$ e $r \neq s$.

Demonstração
Basta notar que $r \neq s$ e $r // s$ determinam um plano γ que temos "três planos distintos (α, β e γ), dois a dois secantes ($\alpha \cap \beta = t$, $\alpha \cap \gamma = r$, $\beta \cap \gamma = s$), segundo três retas distintas, e duas delas são paralelas (r e s), então todas as três são paralelas ($t // r$ e $t // r$".



30. Sendo $\beta \cap \gamma = x$, temos três planos, dois a dois secantes: $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$ e $\beta \cap \gamma = x$. Surgem duas possibilidades:

1ª) Se a e b são concorrentes.
Neste caso as três retas a, b e x incidem num ponto.
2ª) Se a e b são paralelas.
Neste caso a reta x é paralela à reta a e paralela à reta b.

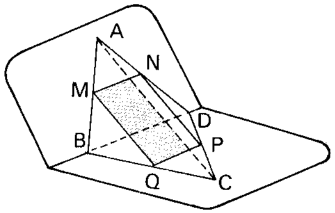
31. São aplicações do teorema dos três planos secantes.

a) $(a = \beta \cap \gamma,\ b = \alpha \cap \gamma,\ c = \alpha \cap \beta$ e $a \cap c = \{P\}) \Rightarrow a \cap b \cap c = \{P\}$
b) $(a = \beta \cap \gamma,\ b = a \cap \gamma,\ c = \alpha \cap \beta$ e $a // c) \Rightarrow (b // a$ e $b // c)$
c) $(a = \beta \cap \gamma,\ b = \alpha \cap \gamma,\ c = \alpha \cap \beta) \Rightarrow (\exists P \mid a \cap b \cap c = \{P\}$ ou $a // b$, $a // c$ e $b // c)$

Capítulo II — Paralelismo

Paralelismo entre retas e planos

32.



ABCD é um quadrilátero reverso.

M é o ponto médio de $\overline{AB}$.
N é o ponto médio de $\overline{AD}$.
P é o ponto médio de $\overline{CD}$.
Q é o ponto médio de $\overline{BC}$.

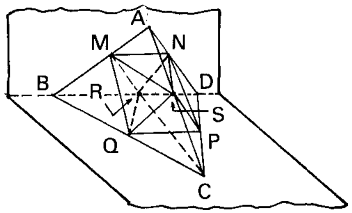
Vamos provar que *MNPQ* é um paralelogramo.

Demonstração

$$\left.\begin{array}{l} \text{No } \Delta ABD\text{: } \overline{MN} \parallel \overline{BD},\ \overline{MN} = \dfrac{\overline{BD}}{2} \\ \text{No } \Delta BCD\text{: } \overline{PQ} \parallel \overline{BD},\ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{BD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (\overline{MN} \parallel \overline{PQ} \text{ e } \overline{MN} \equiv \overline{PQ}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ MNPQ é paralelogramo.

33.

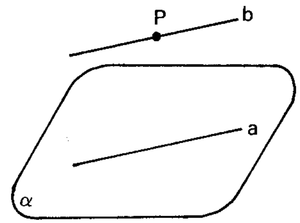


Demonstração

1º paralelogramo: MNPQ — provado no exercício anterior.
2º paralelogramo: MSPR — demonstração análoga à do 1º; basta considerar ΔABC e ΔDBC.
3º paralelogramo: NSQR — demonstração análoga à do 1º; basta considerar ΔACD e ΔBCD.

34. *MNPQ* é paralelogramo $\Rightarrow$ $\overline{MP} \cap \overline{NQ} = \{X\}$ e X é ponto médio de $\overline{MP}$. (1)
MSPR é paralelogramo $\Rightarrow$ $\overline{MP} \cap \overline{RS} = \{Y\}$ e Y é ponto médio de $\overline{MP}$. (2)
De (1) e (2) temos: X = Y.
Logo, $\overline{MP} \cap \overline{NQ} \cap \overline{RS} = \{X\}$.

35.



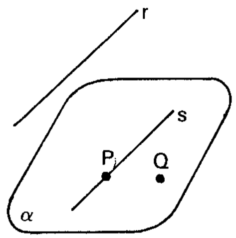
Construção

1) Consideremos uma reta *a* e um ponto *P*, tais que $a \subset \alpha$ e $P \not\in \alpha$.
2) $a \subset \alpha,\ P \not\in \alpha \Rightarrow P \not\in a \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists|\ b,\ P \in b$ e $b \parallel a$.

Prova (de que $b \parallel \alpha$)
$(b \not\subset \alpha,\ b \parallel a,\ a \subset \alpha) \Rightarrow b \parallel \alpha$

Observação: O problema tem infinitas soluções.

36.



Construção

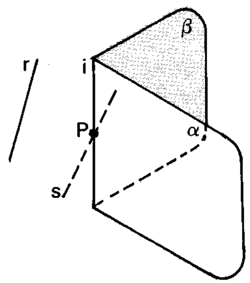
1) Consideremos um ponto *P* tal que $P \not\in r$.
2) $P \not\in r \Rightarrow \exists|\ s,\ P \in s$ e $s \parallel r$.
3) Tomemos um ponto *Q* fora de *s* e do plano (r, s).
4) *Q* e *s* determinam o plano α.

Prova (de que $\alpha \parallel r$)
$(r \neq s,\ r \parallel s,\ s \subset \alpha,\ r \not\subset \alpha) \Rightarrow \alpha \parallel r$

Observação: O problema tem infinitas soluções.

37. Resolvido.

38. $r \parallel \alpha,\ r \parallel \beta,\ \alpha \cap \beta = i \Rightarrow r \parallel i$



Demonstração

Por um ponto $P \in i$, vamos construir uma reta *s* paralela a *r* e vamos provar que $s = i$.
$(r \parallel \alpha,\ P \in \alpha,\ s \parallel r,\ P \in s) \Rightarrow s \subset \alpha$
$(r \parallel \beta,\ P \in \beta,\ s \parallel r,\ P \in s) \Rightarrow s \subset \beta$
$(s \subset \alpha,\ s \subset \beta) \Rightarrow s = \alpha \cap \beta \Rightarrow s = i$
Como $s \parallel r$ e $s = i$, vem que $i \parallel r$.

39. (a // b, a // α) $\Rightarrow$ (b // α ou b $\subset \alpha$)

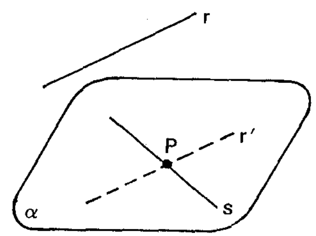
Demonstração (pelo método indireto)

As retas a e b, paralelas e distintas, determinam um plano β.
Se b e α forem concorrentes e sendo P tal que $b \cap \alpha = \{P\}$, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} P \in b,\ b \subset \beta \Rightarrow P \in \beta \\ b \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \exists i \mid \alpha \cap \beta = i \text{ e } P \in i$$

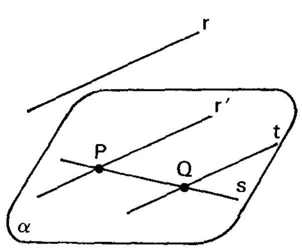
Então: $b \cap i = \{P\}$.
Em β, teríamos a // b e b concorrente com i. Logo, a e i seriam concorrentes, o que é *absurdo*, pois $i \subset \alpha$ e $a \cap \alpha = \varnothing$, por hipótese.

40. *Construção*
Consideremos um ponto P em s.
Por P conduzimos r' paralela a r.
r' e s, concorrentes, determinam um plano α.



Prova (de que α // r)
($r' \neq r$, r' // r, $\alpha \supset r'$) $\Rightarrow$ α // r

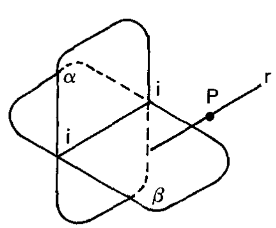
41.



Demonstração

Consideremos um ponto P qualquer, da reta s.
Por ele construímos a reta r' // r.
r' e s concorrentes determinam um plano α, que é paralelo a r (exercício anterior).
Por outro ponto Q qualquer, de s, conduzimos uma reta t paralela a r.
A reta t está em α, conforme vimos no exercício *37*.

42.



Construção

Por P construímos uma reta r paralela à interseção i.

Prova (de que r // α e r // β)
($r \not\subset \alpha$, r // i, $i \subset \alpha$) $\Rightarrow$ r // α
($r \not\subset \beta$, r // i, $i \subset \beta$) $\Rightarrow$ r // β

43. Resolvido.

44. *1º caso*

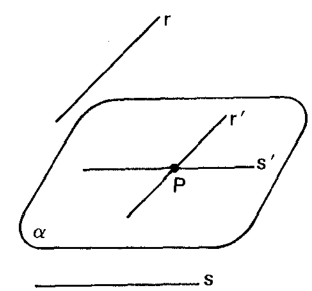
O ponto pertence a uma das retas.
Neste caso o problema não tem solução.

2º caso

O ponto e uma das retas determinam um plano paralelo à outra reta.
Neste caso o problema não tem solução.

3º caso

α = (r, P), α não é paralelo a s
β = (s, P), β não é paralelo a r
Neste caso o problema tem solução.



Construção

Por P conduzimos r' // r.
Por P conduzimos s' // s.
As retas r' e s' concorrentes determinam um plano γ.

Prova (de que γ // r e γ // s)
(r // r', $r' \subset \gamma$, $r \not\subset \gamma$) $\Rightarrow$ r // γ
(s' // s, $s' \subset \gamma$, $s \not\subset \gamma$) $\Rightarrow$ s // γ

45. Existem infinitos pontos P. São os pontos que com uma das retas determinam um plano paralelo à outra.

46. *Demonstração* (pelo método indireto)

Se existissem dois planos distintos, α e α', ambos paralelos a r, passando por s, teríamos:
r // α, r // α', $s = \alpha \cap \alpha'$ $\Rightarrow$ r // s,
o que é *absurdo*, pois contraria a hipótese (r e s são reversas).

47. a) F, pois a reta pode estar contida no plano.
b) V c) V d) V e) V
f) F, pois a reta paralela ao plano pode ser reversa à reta do plano.
g) F, pois as retas do plano podem ser paralelas à reta dada.
h) F, pois a reta e o plano não têm ponto comum.
i) F, pois a reta que é concorrente com o plano pode ser reversa a retas desse plano.
j) V
k) F, pois as retas distintas podem ser concorrentes ou reversas.
l) V m) V
n) F, pois passam infinitos planos.

48. a) F, pois a reta pode encontrar uma e ser paralela à outra.
b) V
c) F, pois existem planos que passam por uma e são paralelos à outra.
d) F, pois o ponto pode determinar, com uma das retas, um plano paralelo à outra.

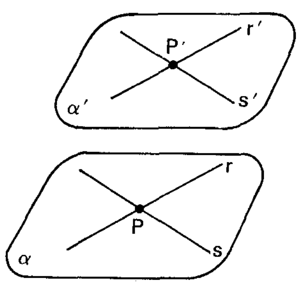
Paralelismo entre planos

49. $\alpha \neq \beta, \alpha \,//\, \beta, a \subset \alpha \Rightarrow a \,//\, \beta$

Demonstração

$(\alpha \cap \beta = \varnothing, a \subset \alpha) \Rightarrow a \cap \beta = \varnothing \Rightarrow a \,//\, \beta$

50.



Construção

Consideremos as retas r e s tais que: $r \subset \alpha, s \subset \alpha, r \cap s = \{P\}$
Por P construímos $r' \,//\, r$ e $s' \,//\, s$.
As retas r' e s' concorrentes determinam um plano α'.

Prova (de que $\alpha' \,//\, \alpha$)
$(r' \neq r, r' \,//\, r, r \subset \alpha, r' \not\subset \alpha) \Rightarrow r' \,//\, \alpha$
$(s' \neq s, s' \,//\, s, s \subset \alpha, s' \not\subset \alpha) \Rightarrow s' \,//\, \alpha$
$(r' \subset \alpha', s' \subset \alpha, r' \cap s' = \{P'\}, r' \,//\, \alpha, s' \,//\, \alpha) \Rightarrow \alpha' \,//\, \alpha$

51. $(\alpha \neq \beta, \alpha \,//\, \beta, a \cap \beta = \{O\}) \Rightarrow$ a e α são concorrentes.

Demonstração

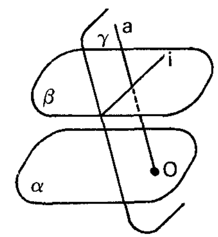
Vamos analisar as posições relativas de a e α e chegar à tese, por exclusão.

1º) Se $a \subset \alpha$, como $O \in a$, então $O \in \alpha$.
Se $O \in \alpha$, como $O \in \beta$, então $O \in \alpha \cap \beta$, o que é um *absurdo*, pois contraria a hipótese.
Logo, $a \not\subset \alpha$.

2º) Se $a \,//\, \alpha$, existe uma reta $a' \,//\, a$, $a' \subset \alpha$ e, então, $a' \,//\, \beta$.
$(a' \,//\, \beta, O \in \beta, O \in a, a \,//\, a') \Rightarrow a \subset \beta$
o que é *absurdo*, pois contraria a hipótese.
Logo, a não é paralela a α.

Por exclusão, a e α são concorrentes.

52. $(\alpha \neq \beta, \alpha \,//\, \beta, \beta \cap \gamma = i) \Rightarrow \alpha$ e γ são secantes



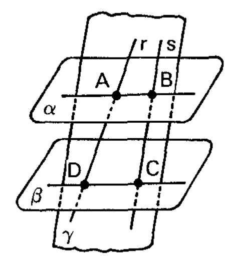
Demonstração

Basta considerar em γ uma reta a concorrente com i.
Como $\beta \neq \gamma$, concluímos que a é concorrente com β e, como α e β são paralelos, então a é concorrente com α num ponto O.
Então: $O \in a, a \subset \gamma \Rightarrow O \in \gamma$.

Conclusão: $(O \in \gamma, O \in \alpha, \alpha \neq \gamma) \Rightarrow O \in \alpha \cap \gamma \Rightarrow \alpha$ e γ são secantes.

53. Resolvido.

54.



Demonstração

Por hipótese, $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$
$(\alpha \,//\, \beta, \gamma \cap \alpha = \overleftrightarrow{AB}, \gamma \cap \beta = \overleftrightarrow{CD}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$.
Logo, $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$.

$(\overline{AD} \,//\, \overline{BC}, \overline{AB} \,//\, \overline{CD}) \Rightarrow$ ABCD é paralelogramo $\Rightarrow \overline{AD} \equiv \overline{BC}$.

55. $(\alpha \,//\, \beta, a \,//\, \beta) \Rightarrow (a \,//\, \alpha$ ou $a \subset \alpha)$

Demonstração (pelo método indireto)

Se existe P tal que $\{P\} = a \cap \alpha$, como $\alpha \,//\, \beta$, então a e β são concorrentes, o que é *absurdo*, pois contraria a hipótese $(a \,//\, \beta)$.

56. Resolvido.

57. $(\alpha \,//\, \gamma, \beta \,//\, \gamma) \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$

Demonstração (pelo método indireto)

Se α e β têm um ponto P comum, de duas uma:
1º) $\alpha = \beta$, e neste caso eles são paralelos ($\alpha \,//\, \beta$), ou
2º) $\alpha \neq \beta$, e neste caso teríamos por um ponto (P) dois planos distintos (α e β) paralelos a um terceiro plano (γ), o que é *absurdo*, pois contraria a propriedade provada no exercício *56*.

58. $(\alpha' \,//\, \alpha, \beta' \,//\, \beta, \alpha \cap \beta = i) \Rightarrow (\alpha' \cap \beta' = i' \text{ e } i' \,//\, i)$

1ª parte: Vamos provar que $\alpha' \cap \beta' = i'$, pelo método indireto.

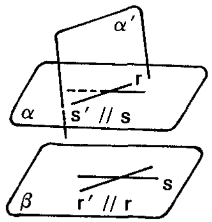
Negar a tese significa, nesse caso, que $\alpha' \,//\, \beta'$.
Se $\alpha' \,//\, \beta'$ e $\alpha' \,//\, \alpha$, então $\alpha \,//\, \beta'$.
Se $\alpha' \,//\, \beta'$ e $\beta' \,//\, \beta$, então $\alpha \,//\, \beta$, o que é um *absurdo*, pois contraria a hipótese.

2ª parte: Vamos provar que $i' \,//\, i$.
Se $\alpha' \,//\, \alpha$ e $\alpha \cap \beta = i$, então $\alpha' \cap \beta = i''$, $i'' \,//\, i$.
Se $\beta' \,//\, \beta$ e $\alpha' \cap \beta' = i'$, então $\alpha' \cap \beta = i''$, $i'' \,//\, i'$.

Conclusão: $(i'' \,//\, i, i'' \,//\, i') \Rightarrow i \,//\, i'$.

59. *Demonstração*

Sejam r e s duas retas reversas e
α o plano por r, sendo $\alpha \,//\, s$ e
β o plano por s, sendo $\beta \,//\, r$.
Os planos α e β são paralelos, pois cada um contém duas retas concorrentes, ambas paralelas ao outro.
Se existisse um plano α', distinto de α, por r e paralelo a β, teríamos



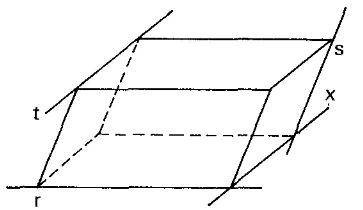
$$\left.\begin{array}{l} (r \subset \alpha, r \subset \alpha', \alpha \neq \alpha') \Rightarrow \alpha' \cap \alpha = r \\ \alpha \,//\, \beta, s \subset \beta \Rightarrow s \,//\, \alpha \\ \alpha' \,//\, \beta, s \subset \beta \Rightarrow s \,//\, \alpha' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow s \,//\, r$, o que é *absurdo*, pois r e s são reversas.
Logo, por r só passa α paralelo a β.
Analogamente, por s só passa β paralelo a α.

60. 1º) Se $a \subset \alpha$, o problema não tem solução.
2º) Se $a \,//\, \alpha$ e $\beta = (a, P)$ é paralelo a α, o problema tem infinitas soluções em β.

3º) Se $a \,//\, \alpha$ e $\beta = (a, P)$ não é paralelo a α, o problema não tem solução.
4º) Se a e α são concorrentes, acha-se a reta i, interseção de α com $\beta = (a, P)$.
Por P, traça-se a reta x paralela à i.
A reta x é a solução.

61. *1º caso:* Não existe plano paralelo às três retas.



Neste caso, o problema admite uma única solução.
Basta conduzir por s um plano paralelo a t e por r um outro plano paralelo à reta t. A interseção dos dois planos é a reta x pedida.

2º caso: Existe plano paralelo às três retas.

Neste caso, o problema não tem solução.
Qualquer reta paralela à reta t concorrente com r está num plano paralelo à reta s, não podendo ser concorrente com s.

62. Seja $\alpha \cap \beta = t$. A partir daí recaímos no exercício anterior.

63. Basta tomar um ponto P numa das retas e a solução do problema é a reta x interseção dos planos determinados por P e pelas outras duas retas.
No 1º caso o ponto P não pode ser nenhum dos pontos A, B, C, D, E ou F da figura da teoria. São pontos de uma das retas que com uma delas determinam um plano paralelo à outra.
No 2º caso o problema sempre tem solução.

64. a) F, pois a reta de um deles pode ser paralela ao outro.
b) V
c) V
d) F, pois não têm nenhum ponto comum.
e) V
f) F, pois as retas estão em planos paralelos, não podendo assim ter ponto comum.
g) F, pois uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro.
h) V
i) F, pois podem ser secantes.
j) F, pois podem ser secantes.
k) F, pois podem ser secantes.
l) F, pois podem ser secantes.
m) F, pois as retas distintas precisam ser concorrentes.
n) V
o) F, pois a reta pode ser paralela ao outro plano.

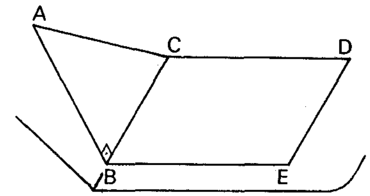
65. a) F, pois a reta pode ser paralela às outras duas.
b) V c) V
d) F, pois a reta paralela a uma delas pode ser reversa às outras duas.

66. a) V
b) F, pois podem ser ortogonais.
c) V d) V e) V
f) F, podem ser perpendiculares entre si, oblíquas entre si, paralelas entre si, reversas entre si.
g) F, vide o item *f*.
h) V

Capítulo III – Perpendicularidade

Reta e plano perpendiculares

67.

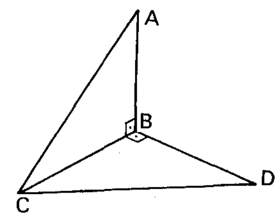


Demonstração

$(\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{BC} \parallel \overline{DE}, \overline{AB}$ e $\overline{DE}$ reversas$) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{DE}$

68. Resolvido.

69.



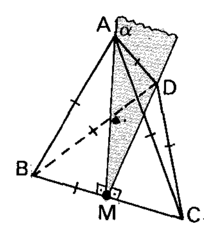
Demonstração

1) $(\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{AB} \perp \overline{CD}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AB} \perp (B, C, D) \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BD}$

2) $(\overline{BD} \perp \overline{AB}, \overline{BD} \perp \overline{BC}) \Rightarrow \overline{BD} \perp (A, B, C) \Rightarrow \overline{BD} \perp \overline{AC}$

70. Resolvido.

71. Basta determinar o plano que passa por uma aresta e pelo ponto médio da oposta e recair no exercício anterior.

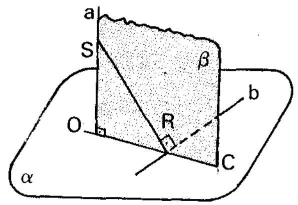


Demonstração

Seja M ponto médio de $\overline{BC}$ e seja
$\alpha = (A, M, D)$.
$(\overline{BC} \perp \overline{AM}, \overline{BC} \perp \overline{DM}) \Rightarrow \overline{BC} \perp \alpha$
$(\overline{BC} \perp \alpha, \overline{AD} \subset \alpha) \Rightarrow \overline{BC} \perp \overline{AD}$

72. Resolvido.

73. $(a \perp \alpha,\ a \cap \alpha = \{O\},\ b \subset \alpha,\ O \notin b,\ c \subset \alpha,\ O \in c,\ b \cap c = \{R\},\ s \in a,$
$\overleftrightarrow{SR} \perp b) \Rightarrow b \perp c$

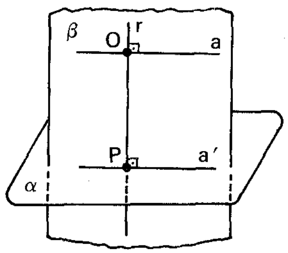


Demonstração

Seja $\beta = (a, c)$.
$(a \perp \alpha,\ b \subset \alpha) \Rightarrow a \perp b$
$(b \perp a,\ b \perp \overleftrightarrow{SR},\ a \cap \overleftrightarrow{SR} = \{S\},\ a \subset \beta,$
$\overleftrightarrow{SR} \subset \beta) \Rightarrow b \perp \beta$
$(b \perp \beta,\ b \cap \beta = \{R\},\ R \in c,$
$c \subset \beta) \Rightarrow b \perp c$

74. O ângulo é reto. Basta ver o teorema das três perpendiculares.

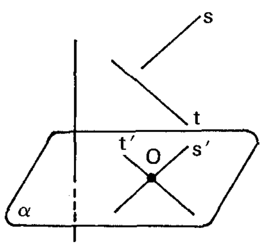
75. $(a \perp r,\ a \cap r = \{O\},\ r \perp \alpha,\ r \cap \alpha = \{P\},\ O \neq P) \Rightarrow a \mathbin{/\!/} \alpha$



Demonstração

Seja $\beta = (a, r)$.
$(\alpha \cap \beta = a',\ P \in a',\ r \perp a,\ r \cap \alpha = \{P\},$
$a' \subset \alpha,\ P \in a') \Rightarrow r \perp a'$
$(r \perp a,\ r \cap a = \{O\},$
$r \perp a',\ r \cap a' = \{P\},$
$O \neq P,\ a \subset \beta,\ a' \subset \beta) \Rightarrow a \mathbin{/\!/} a'$
$(a \mathbin{/\!/} a',\ a' \subset \alpha) \Rightarrow a \mathbin{/\!/} \alpha$

76. $(s \mathbin{/\!/} \alpha,\ t \mathbin{/\!/} \alpha,\ s \mathbin{/\!/} t,\ a \perp s,\ a \perp t) \Rightarrow a \perp \alpha$



Demonstração

Por um produto O do plano α conduzimos $s' \mathbin{/\!/} s$ e $t' \mathbin{/\!/} t$.
$(s \mathbin{/\!/} s',\ s \mathbin{/\!/} \alpha,\ O \in \alpha,\ O \in s') \Rightarrow s' \subset \alpha$
$(t \mathbin{/\!/} t',\ t \mathbin{/\!/} \alpha,\ O \in \alpha,\ O \in t') \Rightarrow t' \subset \alpha$
$(a \perp s,\ s \mathbin{/\!/} s') \Rightarrow a \perp s'$
$(a \perp t,\ t' \mathbin{/\!/} t) \Rightarrow a \perp t'$

Conclusão: $(a \perp s',\ a \perp t',\ s' \subset \alpha,\ t' \subset \alpha,\ s' \cap t' = \{O\} \Rightarrow a \perp \alpha$.

77. a) V
b) F, pois pode ser ortogonal a retas do plano.
c) V
d) F, pois as retas distintas devem ser concorrentes.

e) V
f) F, pois as retas distintas devem ser concorrentes.
g) V
h) F, pois a reta pode ser oblíqua ao plano.
i) V j) V k) V
l) F, pois a reta pode ser paralela ao plano.
m) V n) V

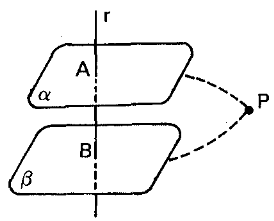
78. Resolvido.

79. Resolvido.

80. a) $(\alpha \perp r,\ \beta \perp r) \Rightarrow \alpha \mathbin{/\!/} \beta$

1.º caso: $\alpha = \beta$ e então $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$

2.º caso: Para $\alpha \neq \beta$, utilizaremos o método indireto de demonstração.



Se $\alpha \neq \beta$ e têm um ponto P comum, vem:
Por P, dois planos distintos perpendiculares a uma reta r, o que é um *absurdo*, pois contraria o fato de que por um ponto P pode-se conduzir um único plano perpendicular a uma reta r (exercício anterior).

b) Resolvido.

c) $(a \mathbin{/\!/} b,\ \alpha \perp a) \Rightarrow \alpha \perp b$

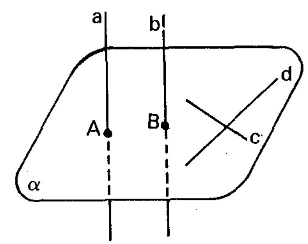
Demonstração

1.º caso

Se $a \mathbin{/\!/} b$, sendo $a = b$, temos:
$(a = b,\ \alpha \perp a) \Rightarrow \alpha \perp b$.

2.º caso

Se $a \mathbin{/\!/} b$ e $a \cap b = \varnothing$, temos:
$a \cap \alpha = \{A\}$
$b \cap \alpha = \{B\}$



Consideremos em α duas retas c e d concorrentes. Temos, então:

$(a \perp \alpha, c \subset \alpha, d \subset \alpha) \Rightarrow (a \perp c, a \perp d)$
$(a \perp c, a \perp d, a \,//\, b) \Rightarrow (b \perp c, b \perp d)$

Conclusão:
$(b \perp c, b \perp d, c \subset \alpha, d \subset \alpha$, *c* e *d* concorrentes$) \Rightarrow b \perp (c, d) \Rightarrow b \perp \alpha.$

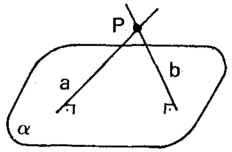
d) $(a \perp \alpha, b \perp \alpha) \Rightarrow a \,//\, b$

Demonstração

1.º caso: $a = b \Rightarrow a \,//\, b$

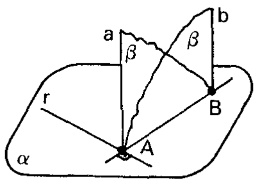
2.º caso: Se $a \neq b$, precisamos provar que $a \cap b = \varnothing$ e que *a* e *b* são coplanares.

1.ª parte



Se *a* e *b* têm um ponto comum, verifica-se um *absurdo*, pois contraria o fato de que por um ponto fora de um plano passa uma única reta perpendicular ao plano.
Logo, $a \cap b = \varnothing$. (1)

2.ª parte



Sejam:
$\{A\} = a \cap \alpha$; $\{B\} = b \cap \alpha$;
$\beta = (a, B)$; $\beta' = (b, A)$.
Consideremos uma reta *r* em α, sendo *r* perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.
O plano β é perpendicular a *r* em *A*, pois $a \perp r$ e $\overleftrightarrow{AB} \perp r$.
O plano β' também é perpendicular a *r* em *A*, pois *b* é ortogonal a *r* e $\overleftrightarrow{AB} \perp r$.
Então, os planos β e β' coincidem e as retas *a* e *b* são coplanares. (2)

Conclusão: de (1) e (2) vem que $a \,//\, b$.

81. $(a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \,//\, \beta) \Rightarrow a \,//\, b$

Demonstração

$(\alpha \,//\, \beta, a \perp \alpha) \Rightarrow a \perp \beta$ (exercício *80*, parte *b*)
$(a \perp \beta, b \perp \beta) \Rightarrow a \,//\, b$ (exercício *80*, parte *d*)

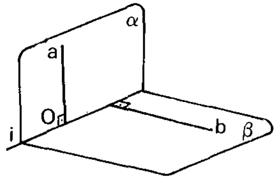
82. $(a \perp \alpha, b \perp \beta, a \,//\, b) \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$

Demonstração

$(a \,//\, b, a \perp \alpha) \Rightarrow b \perp \alpha$ (exercício *80*, parte *c*)
$(b \perp \alpha, b \perp \beta) \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$ (exercício *80*, parte *a*)

Planos perpendiculares

83. $(\alpha \supset a, a \perp \beta) \Rightarrow (\beta \supset b, b \perp \alpha)$

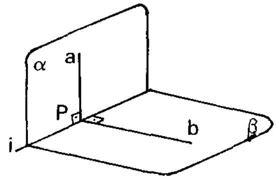


a) *Construção*
1) Da hipótese podemos afirmar que α e β são secantes. Seja *i* a interseção de α e β.
2) Em β, construímos uma reta *b* perpendicular à reta *i*.

b) *Prova* (de que $b \perp \alpha$)

$$\left.\begin{array}{l} (a \perp \beta, b \subset \beta) \Rightarrow b \perp a \\ \quad\text{construção} \qquad\quad b \perp i \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp (a, i) \Rightarrow b \perp \alpha$$

84. $(a \subset \alpha, \alpha \perp b) \Rightarrow (b \subset \beta, \beta \perp a)$



a) *Construção*
Seja *P* o ponto de interseção de *b* com α.
Em α, consideremos a reta *i*, por *P*, perpendicular à reta *a*.
Seja $\beta = (b, i)$.

b) *Prova* (de que $\beta \perp a$).

$(b \perp \alpha, b \cap \alpha = \{P\}, a \subset \alpha, P \in a) \Rightarrow b \perp a$
$(a \perp b, a \perp i, b \cap i = \{P\}) \Rightarrow a \perp (b, i) \Rightarrow a \perp \beta.$

85. Resolvido.

86. $(\alpha \perp \beta, a \perp \beta) \Rightarrow (a \,//\, \alpha$ ou $a \subset \alpha)$

Demonstração

De duas, uma: ou *a* e α têm um ponto comum ou não têm.

Se a e α não têm ponto comum, $a \mathbin{//} \alpha$.
Se a e α têm um ponto comum, pelo exercício anterior, $a \in \alpha$.
Logo, $a \mathbin{//} \alpha$ ou $a \subset \alpha$.

87. $(\alpha \mathbin{//} \beta, \gamma \perp \alpha) \Rightarrow \gamma \perp \beta$

Demonstração

$\gamma \perp \alpha \iff (\gamma \supset a, a \perp \alpha)$
$(\alpha \mathbin{//} \beta, a \perp \alpha) \Rightarrow a \perp \beta$
$(\gamma \supset a, a \perp \beta) \iff \gamma \perp \beta$

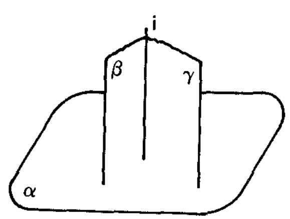
88. $(a \mathbin{//} \alpha, \beta \perp a) \Rightarrow \beta \perp \alpha$

Demonstração

$(a \mathbin{//} \alpha) \Rightarrow (\exists b, b \mathbin{//} a, b \subset \alpha)$
$(a \mathbin{//} b, \beta \perp a) \Rightarrow \beta \perp b$
$(\alpha \supset b, b \perp \beta) \iff \alpha \perp \beta$

89. Resolvido.

90. $(\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma, i = \beta \cap \gamma) \Rightarrow \alpha \perp i$



Demonstração (pelo método indireto)

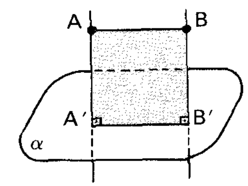
Se a reta *i* não é perpendicular a α, por uma reta (*i*) não perpendicular a um plano (α), temos dois planos distintos (β e γ), ambos perpendiculares ao plano α, o que é um *absurdo*, pois contraria o que foi demonstrado no exercício anterior.

91. a) F, pois dois planos secantes podem ser oblíquos.
b) V
c) F, pois existem retas de um deles paralelas ao outro.
d) F, pois pela reta passam infinitos planos perpendiculares ao plano dado.
e) F, pois os planos podem ser paralelos entre si.
f) F, pois eles podem ser perpendiculares entre si.
g) V h) V
i) F, pois ele pode ser paralelo à reta.
j) V
k) F, pois existem retas de um deles paralelas a retas de outro.

Capítulo IV — Aplicações

Projeção ortogonal sobre um plano

92. $(\overline{AB} \mathbin{//} \alpha, \overline{A'B'} = \text{proj}_\alpha \overline{AB}) \Rightarrow \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$



Demonstração

$AA'BB'$ é um retângulo e $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são lados opostos desse retângulo.
Logo, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

93. Resolvido.

94. a) V
b) F, pois pode ser um ponto.
c) F, pois pode ser um ponto.
d) V e) V f) V
g) F, pois um dos segmentos pode ser perpendicular ao plano.
h) F, pois os segmentos oblíquos ao plano podem não ser paralelos entre si.
i) F, pois pode ser um segmento.

95. a) F, pois podem ser reversas.
b) V c) V d) V e) V f) V g) V

96. As posições relativas das projeções ortogonais, sobre um plano, de duas retas concorrentes podem ser:

a) duas retas concorrentes, se o plano deles não é perpendicular ao plano de projeção;
b) duas retas coincidentes, se nenhuma delas é perpendicular ao plano de projeção, mas o plano delas é perpendicular a esse plano;
c) uma reta e um ponto dessa reta, se uma delas é perpendicular ao plano de projeção.

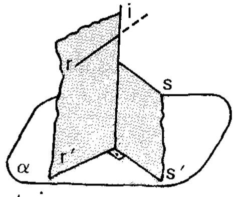
97. As posições relativas das projeções ortogonais, sobre um plano, de duas retas reversas podem ser:

a) duas retas concorrentes, se os planos projetantes são secantes;
b) duas retas paralelas, se os planos projetantes são paralelos;
c) uma reta e um ponto fora dela, se uma delas é perpendicular ao plano de projeção.

98. Resolvido.

99. ($r' = \text{proj}_\alpha r$, $s' = \text{proj}_\alpha s$, $r' \perp s'$, $s // \alpha$ ou $s \subset \alpha$, r não é perpendicular a α) $\Rightarrow r \perp s$

Demonstração



($s // \alpha$ ou $s \subset \alpha$, $s' = \text{proj}_\alpha s$) $\Rightarrow s' // s$
($s' // s$, $r' \perp s'$) $\Rightarrow s \perp r'$
Sendo i a interseção dos planos projetantes de r e de s, temos: ($i \perp \alpha$, $i \perp s'$, $s // s'$) $\Rightarrow s \perp i$
($s \perp r'$, $s \perp i$) $\Rightarrow s \perp (i, r') \Rightarrow s \perp r$

100. ($r \perp s$, $r' = \text{proj}_\alpha r$, $s' = \text{proj}_\alpha s$, $r' \perp s'$, r é oblíqua a α) $\Rightarrow$ ($s // \alpha$ ou $s \subset \alpha$)

Demonstração

É análoga aos dois exercícios anteriores. Basta provar que $s' \perp (r, r')$ e $s \perp (r, r')$.
Se $s' \perp (r, r')$ e $s \perp (r, r')$, então $s' // s$.
$s // s' \Rightarrow$ ($s // \alpha$ ou $s \subset \alpha$)

Distâncias geométricas

101. a) F, pois a distância entre P e A é maior que a distância entre P e α.
b) F, pois contraria a definição de distância entre um ponto e um plano.
c) F, pois a distância é um segmento de reta cujos extremos são o ponto e o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto.
d) V
e) F, pois contraria a definição de distância entre reta e plano paralelos.
f) F, pois contraria a definição de distância entre reta e plano paralelos.
g) V
h) F, pois contraria a definição de distância entre planos paralelos.
i) V
j) F, pois contraria a definição de distância entre duas retas reversas.
k) F, pois a distância entre duas retas reversas é um segmento de reta contido na perpendicular comum e cujos extremos pertencem, cada um deles, a uma das retas.

102. Resolvido.

103. Não, pois o segmento e o plano podem ser paralelos.

104. Resolvido.

105. Basta considerar o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ e a reta r' passando por M e paralela a r.

Os planos que passam por r' são as soluções do problema.
O problema apresenta infinitas soluções nos três casos possíveis, destacados a seguir:

1.º caso: r e $\overleftrightarrow{AB}$ são concorrentes.

Infinitas soluções: qualquer plano α que contém r' é paralelo a r e eqüidistantes de A e B.

2.º caso: r e $\overleftrightarrow{AB}$ são paralelos.

Infinitas soluções: qualquer plano α paralelo a r é eqüidistante de A e B.

3.º caso: r e $\overleftrightarrow{AB}$ são reversos.

Infinitas soluções: qualquer plano α que contém r' é paralelo a r e eqüidistante de A e B.

106. Basta considerar o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ e o plano que passa por M e é perpendicular a r.
Se $r \perp \overleftrightarrow{AB}$, o problema admite infinitas soluções. Caso contrário, a solução é única, quer r e $\overleftrightarrow{AB}$ sejam concorrentes, quer sejam paralelas ou reversas.

107. Analisando as posições relativas de $\overleftrightarrow{AB}$ e α, temos:

1.º caso: $\overline{AB} // \alpha$ ou $\overline{AB} \subset \alpha$

Neste caso, qualquer plano paralelo a α é solução do problema. Temos, então, infinitas soluções.

2.º caso: $\overleftrightarrow{AB}$ é concorrente com α.

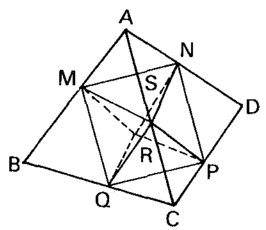
Neste caso, o plano paralelo a α construído pelo ponto médio de $\overline{AB}$ é solução do problema. Temos, então, uma única solução.

108. Basta considerar M, ponto médio de $\overline{AB}$, e por esse ponto conduzir uma reta r, perpendicular a α. Qualquer plano que passa por r é solução do problema. O problema tem infinitas soluções.

109. Sejam M, N, P os respectivos pontos médios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.
Existem quatro infinidades de planos que são soluções do problema.
1.º) Os infinitos planos do feixe de planos paralelos ao plano determinado pelos pontos A, B, C.
2.º) Os infinitos planos do feixe de planos que passam por $\overleftrightarrow{MN}$.
3.º) Os infinitos planos do feixe de planos que passam por $\overleftrightarrow{MP}$.
4.º) Os infinitos planos do feixe de planos que passam por $\overleftrightarrow{NP}$.

110. Sejam, M, N, O os respectivos pontos médios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.
Se $P \notin (A, B, C)$, o problema admite quatro soluções, a saber:
(P, M, N); (P, M, O); (P, N, O) e o plano que passa por P e é paralelo a (A, B, C).
Se P pertence ao plano (A, B, C) e P não pertence a $\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{MO}$ e $\overleftrightarrow{NO}$, o problema tem solução única: o próprio plano (A, B, C).
Se P pertence a $\overleftrightarrow{MN}$ ou a $\overleftrightarrow{MO}$ ou a $\overleftrightarrow{NO}$, o problema apresenta infinitas soluções: são os planos que, nessas condições, passam por $\overleftrightarrow{MN}$ ou por $\overleftrightarrow{MO}$ ou por $\overleftrightarrow{NO}$.

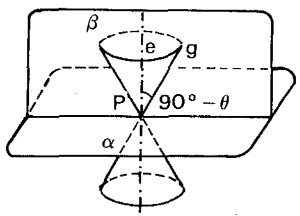
111. Sejam os pontos M, N, P, Q, R, S os respectivos pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$. (Ver na figura um tetraedro $ABCD$ e um octaedro $MNPQRS$.)



O problema admite sete soluções, a saber:
(M, N, S); (M, Q, R);
(P, Q, S); (N, R, P)
(paralelos às faces do tetraedro ABCD)
plano (M, N, P, Q),
plano (M, S, P, R),
plano (N, S, Q, R)
(planos dos paralelogramos, paralelos a duas arestas opostas)

Ângulos de reta com plano

112.



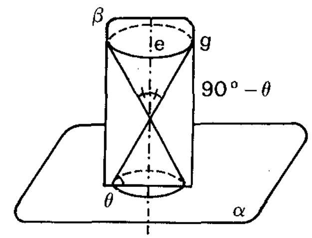
1) Por P conduzimos uma reta e perpendicular a α.

2) Por e conduzimos um plano β, β qualquer.

3) Em β, conduzimos uma reta g tal que $\widehat{eg} = 90° - \theta$.

A reta g, assim construída, passa por P e forma ângulo θ com o plano α.
O problema admite infinitas soluções (só em β há duas): são as geratrizes de uma superfície cônica de revolução de vértice P, eixo e e ângulo de abertura igual a $90° - \theta$.

113. É análogo ao exercício anterior, item por item.



1) Por P conduzimos uma reta e perpendicular a α.

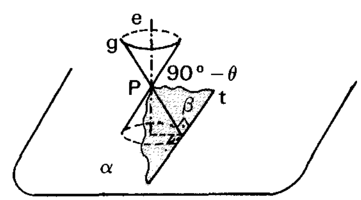
2) Por e conduzimos um plano β, β qualquer.

3) Em β conduzimos uma reta g, concorrente com e em P, tal que $\widehat{eg} = 90° - \theta$.

Conclusão:

A reta g, construída, passa por P e forma ângulo θ com o plano α.
O problema admite infinitas soluções (só em β há duas). São as geratrizes de uma superfície cônica de vértice P, eixo e e ângulo de abertura $90° - \theta$.

114.



1) Construímos por P uma reta g que forma ângulo θ com α (exercício anterior).

2) Construímos uma reta t em α, t perpendicular a g.

3) O plano β pedido é o plano determinado por P e t.

Obs.: O plano β é tangente à superfície cônica de revolução de geratriz g, vértice P e ângulo de abertura $90° - \theta$.

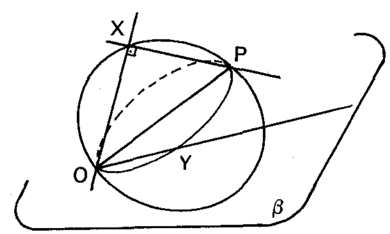
Lugares geométricos

115. Resolvido.

116. Resolvido.

117. S é a superfície esférica de diâmetro $\overline{OP}$.

1.ª parte: Seja $X \in S$, $X \neq O$ e $X \neq P$.
O plano (X, O, P) intercepta S numa circunferência λ de diâmetro $\overline{OP}$ e $X \in \lambda$.
Daí vem que $\overleftrightarrow{OX}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PX}$.

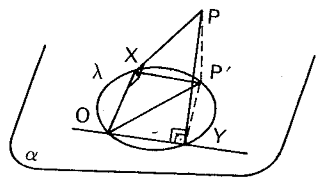


Consideremos um plano α, passando por $\overleftrightarrow{OX}$, sendo perpendicular ao plano (X, O, P).
O ponto X é pé de uma perpendicular ($\overleftrightarrow{PX}$), conduzida por P, a um plano (α) que passa por O.

2.ª parte: Seja Y, $Y \neq O$ e $Y \neq P$, o pé da perpendicular $\overleftrightarrow{PY}$ a um plano β que passa por O.
A reta $\overleftrightarrow{PY}$ é perpendicular à reta $\overline{OY}$, pois $\overleftrightarrow{PY}$ é perpendicular a β em Y e $O \in \beta$.
Então, o ponto Y pertence a uma circunferência de diâmetro $\overline{OP}$ e o ponto Y pertence à superfície esférica S.
Notemos que os pontos O e P também têm a propriedade do lugar geométrico.

Conclusão: S é o lugar geométrico pedido.

118. P' é a projeção ortogonal de P sobre α.
λ é a circunferência, contida em α, de diâmetro $\overline{OP}$.

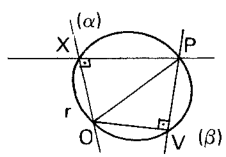


1.ª parte: Seja $X \in \lambda$, $X \neq O$ e $X \neq P'$.
$(X \in \lambda,\ X \neq O,\ X \neq P') \Rightarrow OXP'$ é reta $\Rightarrow \overleftrightarrow{OX} \perp \overleftrightarrow{P'X}$
Sendo $\overleftrightarrow{OX} \perp \overleftrightarrow{P'X}$, pelo teorema das três perpendiculares (exercício *72*), vem que $\overleftrightarrow{PX} \perp \overleftrightarrow{OX}$.
Sendo $\overleftrightarrow{PX} \perp \overleftrightarrow{OX}$, o ponto X tem a propriedade do lugar.

2.ª parte: Seja Y, $Y \in \alpha$, $Y \neq O$, $y \neq P'$ e tal que $\overleftrightarrow{OY} \perp \overleftrightarrow{P'Y}$.
Pelo recíproco do teorema das três perpendiculares (exercício *73*), vem que $\overleftrightarrow{OY} \perp \overleftrightarrow{P'Y}$.
$(\overleftrightarrow{OY} \perp \overleftrightarrow{P'Y},\ Y \in \alpha) \Rightarrow O\widehat{Y}P'$ é reto $\Rightarrow Y \in \lambda$
Por fim notemos que os pontos O e P' também gozam da propriedade do lugar geométrico.

Conclusão: λ é o lugar geométrico procurado.

119. Considere o plano perpendicular a r conduzido pelo ponto P e seja O a interseção dele com a reta r.
λ é uma circunferência de diâmetro $\overline{OP}$ contida no plano considerado.



Agora prove que todo ponto de λ tem a propriedade e que todo ponto que tem a propriedade do enunciado (é pé de perpendicular) pertence a λ, de modo análogo ao feito no exercício *117*.

Capítulo V — Diedros

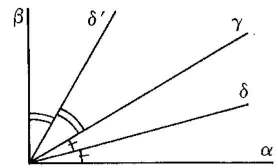
120. Resolvido.

121. Resolvido.

122. Resolvido.

123. Resolvido.

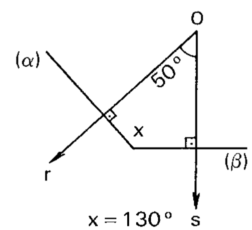
124. Na secção reta temos a situação da figura abaixo.

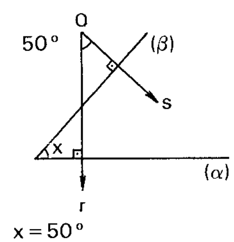


δ: bissetor de $\alpha\gamma$
δ': bissetor de $\gamma\beta$

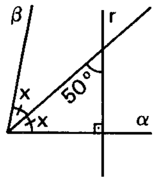
$$(\alpha\gamma + \gamma\beta = 90°;\ \alpha\delta = \delta\gamma;\ \gamma\delta' = \delta'\beta) \Rightarrow \delta\delta' = \delta\gamma + \gamma\delta' = \frac{\alpha\gamma}{2} + \frac{\gamma\beta}{2} = \frac{\alpha\gamma + \gamma\beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$

125. O plano de $r\hat{O}s$ determina uma secção reta no diedro $\alpha\beta$. O ângulo $r\hat{O}s$ e a secção reta são ângulos de lados respectivamente perpendiculares e portanto são congruentes ou suplementares.
Como $r\hat{O}s = 50°$, vem que $\alpha\beta$ mede 50° ou 130°.





126. O ângulo x mede 40°.
Então, o diedro $\alpha\beta$ mede 80°.

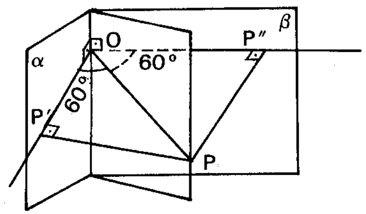


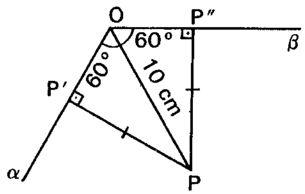
127. Basta traçar uma secção reta e obter ângulos que são opostos pelo vértice.

128. Recai em ângulos de lados respectivamente paralelos que são congruentes ou suplementares. Se um deles mede a, o outro mede a ou $180° - a$.

129. Resolvido.

130. No espaço — Na secção reta

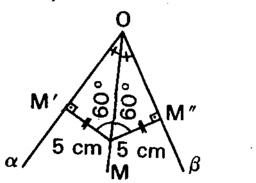




Como P pertence ao bissetor do diedro $\alpha\beta$, $\overline{PP'} \equiv \overline{PP''}$ e $\Delta OPP' \equiv \Delta OPP''$.

No $\Delta OPP'$, temos: $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{PP'}{10} \Rightarrow PP' = 5\sqrt{3}$.

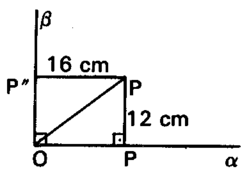
131. Na secção reta, temos:



Se $\overline{MM'} \equiv \overline{MM''} = 5\ cm$, então M pertence ao bissetor do diedro $\alpha\beta$.
No $\Delta OMM'$ temos:

$$\cos 60° = \frac{MM'}{OM} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{OM} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{OM} = 10 \text{ cm}.$$

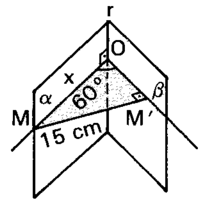
132. Na secção reta, temos:

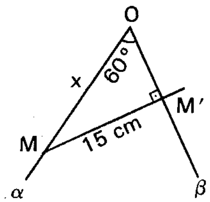


A distância do ponto P até a aresta do diedro $\alpha\beta$ é a diagonal do retângulo $PP'OP''$.

$$(OP)^2 = (OP')^2 + (PP')^2 =$$
$$= 16^2 + 12^2 = 400 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow OP = 20 \text{ cm}$$

133. No espaço — Na secção reta



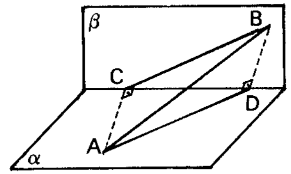


No $\Delta OM'M$ temos:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{MM'}{OM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{OM} \Rightarrow OM = \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow OM = 10\sqrt{3} \text{ cm}.$$

134. Resolvido.

135.

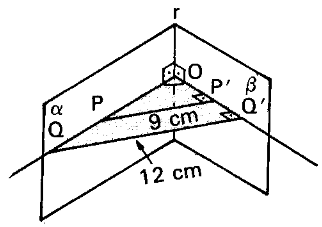


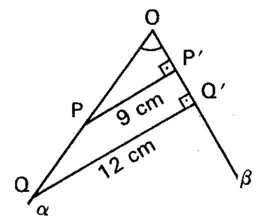
Na figura ao lado, temos:
$AB = 75$ cm; $AC = 50$ cm;
$BD = 55$ cm
Como o diedro $\alpha\beta$ é reto, o ΔABC é retângulo em C. Aplicando Pitágoras, temos:
$BC^2 = 75^2 - 50^2 \Rightarrow BC^2 = 3\,125$.

O triângulo BCD é retângulo em D. Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = 3\,125 - 3\,025 = 100 \Rightarrow CD = 10 \text{ cm}.$$

136. No espaço — Na secção reta

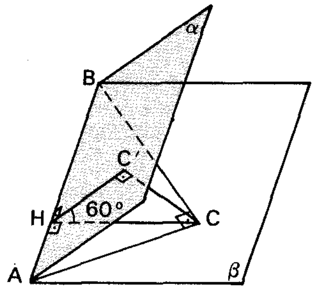




Os triângulos OPP' e OQQ' são semelhantes e, portanto,

$$\frac{QQ'}{PP'} = \frac{OQ}{OP} \Rightarrow \frac{12}{9} = \frac{20}{OP} \Rightarrow OP = 15 \text{ cm}.$$

137. Na figura acima, temos:
$AC = 6$ cm, $BC = 8$ cm e ΔABC é retângulo em $\hat{C}$.
Por Pitágoras calculamos $AB = 10$ cm.



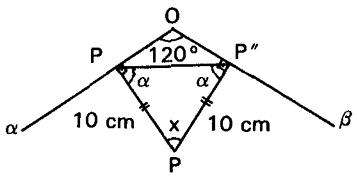
O segmento $\overline{CH}$ é altura do $\Delta ABC \Rightarrow (BC) \cdot (AC) = (AB) \cdot (CH) \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \cdot 6 = 10 \cdot (CH) \Rightarrow CH = \dfrac{24}{5}$

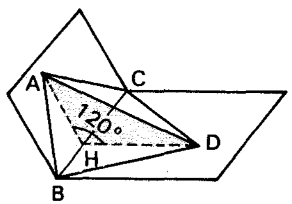
No Δ retângulo CHC', temos:

$\text{sen } 60° = \dfrac{CC'}{CH} \Rightarrow CC' = \dfrac{24}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{12\sqrt{3}}{5}$ cm.

138. Na secção reta, temos:
$PP' = PP'' = 10$ cm
No quadrilátero $PP'OP''$, temos:
$120° + 90° + x + 90° = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 60°$.
No $\Delta PP'P''$, temos:
$60° + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta PP'P''$ é equilátero $\Rightarrow$
$\Rightarrow P'P'' = 10$ cm.

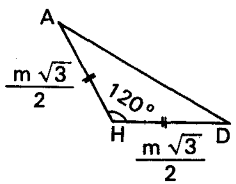


139.



$AB = AC = BC = CD = BD = m \Rightarrow$

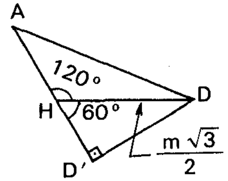
$\Rightarrow AH = HD = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$ cm



a) Aplicando a lei dos cossenos no ΔAHD, temos:

$$(AD)^2 = \left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{m\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \cos 120° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AD)^2 = \frac{3m^2}{4} + \frac{3m^2}{4} + \frac{3m^2}{4} = \frac{9m^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{3m}{2}.$$



b) No $\Delta HDD'$ temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{DD'}{HD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DD}{\frac{m\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DD' = \frac{3m}{4}$$

140. a) V b) V
c) F, pois pode ser paralelo à outra face.
d) F, pois a soma das medidas dos diedros vale 52°.
e) V

141. a) V b) V
c) F, pois podem ser adjacentes.
d) V e) F f) V
g) F, pois a secção pode não ser normal.
h) V i) V j) V

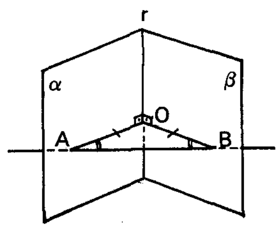
142. a) V b) V c) V d) V e) V f) V

Secções igualmente inclinadas — Congruência de diedros

143. Resolvido.

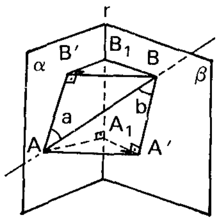
144. Resolvido.

145. *1.º caso*
$\overleftrightarrow{AB}$ ortogonal a *r* (aresta do diedro)



Neste caso, a conclusão é imediata, pois o ΔAOB é isósceles.

2º caso
$\overleftrightarrow{AB}$ não ortogonal a r



Sejam:
$B' = \text{proj}_\alpha B$
$A' = \text{proj}_\alpha A$
$\overline{BB_1} \perp r$, $\overline{AA_1} \perp r$
$\hat{a}$ = ângulo de $\overleftrightarrow{AB}$ com α
$\hat{b}$ = ângulo de $\overleftrightarrow{AB}$ com β

Condição necessária
$\hat{a} = \hat{b} \Rightarrow \overline{AA_1} \equiv \overline{BB_1}$

Demonstração
Os triângulos ABA' e BAB' são congruentes (hipotenusa comum, $\hat{a} \equiv \hat{b}$) e, portanto, $\overline{BB'} \equiv \overline{AA'}$. ①

$\left.\begin{array}{l} \overline{AA'} \perp \beta \Rightarrow \overline{AA'} \perp r \\ \overline{AA_1} \perp r \end{array}\right\} A\widehat{A_1}A'$ é secção reta do di (r)

Analogamente, $B\widehat{B_1}B'$ é secção reta do di (r).
Logo, $A\widehat{A_1}A' \equiv B\widehat{B_1}B'$. ②
$\overline{AA'} \perp \beta \Rightarrow \overline{AA'} \perp \overline{A_1A'} \Rightarrow \Delta AA'A_1$ é retângulo em A'. ③
Analogamente, $\Delta BB'B_1$ é retângulo em B'. ④
(①; ②; ③; ④) $\Rightarrow \Delta AA'A_1 \equiv \Delta BB'B_1 \Rightarrow \overline{AA_1} \equiv \overline{BB_1}$

Condição suficiente
$\overline{AA_1} \equiv \overline{BB_1} \Rightarrow \hat{a} \equiv \hat{b}$

Demonstração
Seqüência:
1) Hipótese $\Rightarrow \Delta AA'A_1 \equiv \Delta BB'B_1 \Rightarrow \overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$
2) $\Delta ABA' \equiv \Delta BAB' \Rightarrow \hat{a} \equiv \hat{b}$

146. Resolvido.

147. Resolvido.

Capítulo VI — Triedros

Relações entre as faces

148. Resolvido.

149. Resolvido.

150. Seja x a medida da terceira face.

a) $0° < x < 180°$ (1)
b) $x + 110° + 140° < 360° \Rightarrow x < 110°$ (2)
c) $|140° - 110°| < x < 140° + 110° \Rightarrow 30° < x < 250°$ (3)

((1); (2); (3)) $\Rightarrow 30° < x < 110°$

151. $f_1 = x$; $f_2 = 2x - 60°$; $f_3 = 30°$

a) $x < 2x - 60° + 30° \Rightarrow x - 2x < -30° \Rightarrow x > 30°$ (1)
b) $2x - 60° < x + 30° \Rightarrow x < 90°$ (2)
c) $30° < x + 2x - 60° \Rightarrow 90° < 3x \Rightarrow x > 30°$ (1)
d) $x + 2x - 60° + 30° < 360° \Rightarrow 3x < 390° \Rightarrow x < 130°$ (3)

((1); (2); (3)) $\Rightarrow 30° < x < 90°$

152. Seja x a medida das faces do triedro.

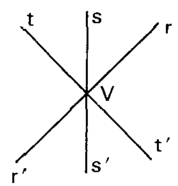
a) $0 < x < 180°$ (1)
b) $|x - x| < x < x + x \Rightarrow 0 < x < 2x$ (2)
c) $x + x + x < 360° \Rightarrow x < 120°$ (3)

((1); (2); (3)) $\Rightarrow 0 < x < 120°$

153. Resolvido.

154. a) F, pois uma das faces é maior que a soma das outras duas.
b) V
c) F, pois a soma das faces deve ser menor do que 360°.
d) V e) F
f) F, pois as semi-retas podem ser coplanares.
g) V

155. Consideremos cada reta dividida em duas semi-retas por V e teremos determinados 8 triedros, a saber:



1) V(r, s, t)
2) V(r', s', t)
3) V(r, s', t)
4) V(r, s, t')
5) V(r', s', t')
6) V(r, s', t')
7) V(r', s, t')
8) V(r', s', t)

Triedros polares ou suplementares

156. Resolvido.

157. a) Se $d_1 = 90°$, $d_2 = 90°$ e $d_3 = 90°$ no polar, temos $f_1 = 90°$, $f_2 = 90°$ e $f_3 = 90°$ e, portanto, existe o triedro.

b) Se $d_1 = d_2 = d_3 = 60°$, no polar temos $f_1 = f_2 = f_3 = 120°$ e o triedro não existe porque $120° + 120° + 120° = 360°$.

c) $d_1 = 200°$; $d_2 = 300°$; $d_3 = 100°$
Neste caso não existe o triedro porque
$d_1 + d_2 + d_3 = 600°$ e $600° > 6$ retos.

d) $d_1 = 120°$; $d_2 = 200°$; $d_3 = 15°$
Neste caso não existe o triedro porque
$15° + 180° < 120° + 200°$.

e) $d_1 = 125°$; $d_2 = 165°$; $d_3 = 195°$
Neste caso não existe o triedro porque
$125° + 180° < 165° + 195°$.

f) $d_1 = 175°$; $d_2 = 99°$; $d_3 = 94°$
Neste caso não existe o triedro porque
$94° + 180° = 175° + 99°$.

g) $d_1 = 100°$; $d_2 = 57°$; $d_3 = 43°$
Neste caso existe o triedro.

h) $d_1 = 110°$; $d_2 = 100°$; $d_3 = 70°$
Neste caso existe o triedro.

158. Não, porque no polar teríamos:
$f_1 = 140°$, $f_2 = 130°$ e $f_3 = 120°$ e $140° + 130° + 120° > 360°$.

159. Sejam $90°$, x, y, as medidas dos diedros do triedro.

a) $180° < 90° + x + y < 540° \Rightarrow 90° < x + y < 450°$ (1)

b) $90° + 180° > x + y \Rightarrow x + y < 270°$ (2)
(1); (2) $\Rightarrow 90° < x + y < 270°$

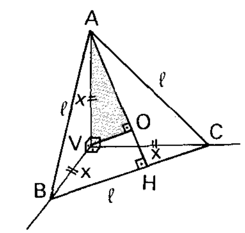
160. $d_1 = x$, $d_2 = 60°$, $d_3 = 110°$
No polar temos:
$f_1 = 180° - x$, $f_2 = 120°$, $f_3 = 70°$
$0° < x < 180°$. (1)
$(180° - x) + 120° + 70° < 360° \Rightarrow x > 10°$ (2)
$120° - 70° < 180° - x < 120° + 70° \Rightarrow$
$\Rightarrow -130° < x < 10° \Rightarrow 130° > x > -10°$ (3)
((1); (2); (3)) $\Rightarrow 10° < x < 130°$

Triedros em geral

161. Resolvido.

162. Resolvido.

163. $\overline{AH}$: altura do Δ equilátero ABC $\Rightarrow AH = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$



Se o ΔABC é equilátero e o triedro é tri-retângulo, então os triângulos *VAB*, *VBC* e *VAC* são retângulos e congruentes.

No ΔVAB temos: $(AB)^2 = (AV)^2 + (VB)^2 \Rightarrow \ell^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.

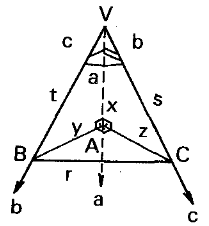
No Δ retângulo *VAO*, temos $(AV)^2 = (VO)^2 + (AO)^2$, em que *VO* é a distância procurada e $AO = \dfrac{2}{3}(AH)$.

Substituindo:
$$\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \overline{VO}^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{VO}^2 = \frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{3} \Rightarrow \overline{VO} = \frac{\ell\sqrt{6}}{6}.$$

164. a) V
b) F, pois no polar teríamos: $f_1 = 140°$; $f_2 = 110°$ e $f_3 = 110°$ e a soma das faces do triedro não seria menor do que $360°$.
c) V

d) F, pois as faces do triedro podem não ter a mesma medida.
e) F, pois cada face do triedro é menor que a soma das outras duas.
f) F, pois as retas r, s, t podem ser coplanares.
g) V h) V

165. Seja V(a, b, c) o triedro onde o diedro de aresta Va é reto.
Sejam a, b, c as medidas das faces bc, ac e ab respectivamente.
Devemos provar que:
$\cos a = \cos b \cdot \cos c$.

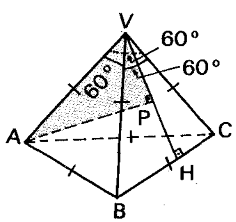


Demonstração

Tomemos um ponto A em Va e tracemos a secção reta do diedro de aresta Va (que é reto) determinando B em Vb e C em Vc.
Nomenclatura:
$AV = x$, $AB = y$ e $AC = z$
$VB = t$, $VC = s$ e $BC = r$

ΔVAB: $t^2 = x^2 + y^2$ e $x = t \cos c$ (1)
ΔVAC: $s^2 = x^2 + z^2$ e $x = s \cos b$ (2)
ΔBAC: $r^2 = y^2 + z^2$ (3)
A lei dos cossenos no triângulo VBC nos dá:
$$r^2 = t^2 + s^2 - 2ts \cos a$$
Substituindo r de (3), t de (1) e s de (2), vem:
$$y^2 + z^2 = (x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) - 2 \cdot \frac{x}{\cos c} \cdot \frac{x}{\cos b} \cdot \cos a$$
Daí vem que $\cos b \cdot \cos c = \cos a$.

166.

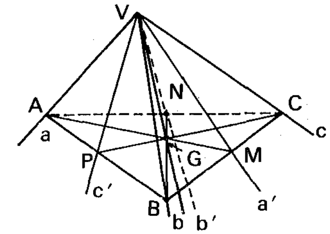


$\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC} = 9$ cm
Os triângulos VAB, VBC, VAC e ABC são congruentes e equiláteros e seus lados medem 9 cm.
No triângulo retângulo VAP, temos:
$(VA)^2 = (AP)^2 + (VP)^2$ em que
$VA = 9$ cm e
$$VP = \frac{2}{3} VH = \frac{2}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$
Substituindo, temos:
$81 = \overline{AP}^2 + 27 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{54} \Rightarrow \overline{AP} = 3\sqrt{6}$ cm.

167. Resolvido.

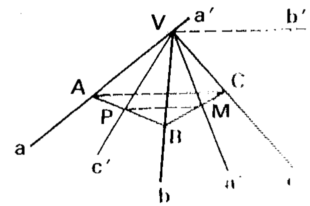
168. Resolvido.

169.



Seja V(a, b, c) o triedro e os planos (a, a'), (b, b') e (c, c'). Tomemos em a, b e c, respectivamente, os pontos A, B e C, tais que $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC}$. As bissetrizes a', b' e c' determinam os pontos médios M, N e P nos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC. As medianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ interceptam-se no ponto G, baricentro do ΔABC. Os planos (a, a'), (b, b') e (c, c') têm os pontos comuns V e G que são distintos, logo têm $\overleftrightarrow{VG}$ comum.

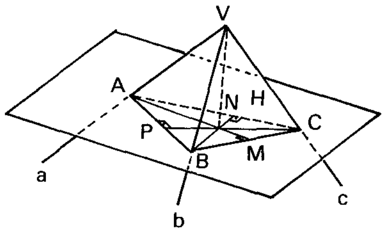
170.



Como no problema anterior, temos:
$A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ tais que $\overline{VA} \equiv \overline{VB} \equiv \overline{VC}$.
As bissetrizes a' e c' determinam os pontos médios M e P nos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ do ΔABC.
Se M é o ponto médio de $\overline{BC}$ e P é o ponto médio de $\overline{AB}$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{MP} \,//\, \overleftrightarrow{AC}$.
Como ΔVAC é isósceles $\Rightarrow$ $b' \,//\, \overleftrightarrow{AC}$
$(b' \,//\, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{MP} \,//\, \overleftrightarrow{AC}) \Rightarrow \overleftrightarrow{MP} \,//\, b' \Rightarrow \overleftrightarrow{MP}$ e b' determinam um único plano.
Conclusão: as bissetrizes a', b', c' estão no plano determinado por $\overleftrightarrow{MP}$ e b'

171. Consideremos o plano α perpendicular à aresta Va, por um ponto $A \in Va$, $A \neq V$. Este plano determina B em Vb e C em Vc. Sejam $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ as alturas do ΔABC e H o ortocentro desse triângulo.
$\{H\} = \overline{AM} \cap \overline{BN} \cap \overline{CP}$
$\overline{VA} \perp \alpha \Rightarrow (\overline{BC} \perp \overline{VA}$ e $\overline{BC} \perp \overline{AM}) \Rightarrow \overline{BC} \perp (V, A, M) \Rightarrow (V, A, M) \perp (b, c)$.

Analogamente, temos:
(V, B, N) $\perp$ (a, c) e (V, C, P) $\perp$ (a, b).



Conclusão:

Os planos (V, A, M), (V, B, N) e (V, C, P) são, respectivamente, os planos α, β e γ do enunciado e têm a reta $\overleftrightarrow{VH}$ comum.

172. *Hipóteses* — *Tese*

$$\left.\begin{array}{l} Vx \subset (b, c) \text{ e } Vx \perp Va \\ Vy \subset (a, c) \text{ e } Vy \perp Vb \\ Vz \subset (a, b) \text{ e } Vz \perp Vc \end{array}\right\} \Rightarrow Vx, Vy, Vz \text{ são coplanares}$$

Demonstração

Conduza os planos α, β e γ, do exercício anterior. Esses planos têm uma reta comum $\overleftrightarrow{VH}$.

$$\left.\begin{array}{l} Vx \perp \overleftrightarrow{VH} \text{ em } V \\ Vy \perp \overleftrightarrow{VH} \text{ em } V \\ Vz \perp \overleftrightarrow{VH} \text{ em } V \end{array}\right\} \Rightarrow Vx, Vy, Vz \text{ são coplanares}$$

Ângulos poliédricos convexos

173. Resolvido.

174. $x < 120° + 140° + 90° \Rightarrow x < 350°$ (1)
$x + 120° + 140° + 90° < 360° \Rightarrow x < 10°$ (2)
((1) e (2)) $\Rightarrow 0° < x < 10°$

175. $x < 20° + 30° + 120° \Rightarrow x < 170°$ (1)
$x + 20° + 30° + 120° < 360° \Rightarrow x < 190°$ (2)
$120° < x + 20° + 30°$
$70° < x \Rightarrow x > 70°$ (3)
((1), (2), (3)) $\Rightarrow 70° < x < 170°$

176. $x < 10° + 20° + 30° + 40° + 50° + 160° \Rightarrow x < 310°$ (1)
$x + 10° + 20° + 30° + 40° + 50° + 160° < 360° \Rightarrow x < 50°$ (2)
$160° < x + 10° + 20° + 30° + 40° + 50° \Rightarrow 10° < x \Rightarrow x > 10°$ (3)
(1); (2); (3) $\Rightarrow 10° < x < 50°$

177. a) Neste caso não existe o ângulo poliédrico porque
$150° > 40° + 60° + 30°$.
b) Neste caso não existe o ângulo poliédrico porque
$100° + 120° + 130° + 70° > 360°$.
c) Existe.
d) Existe.
e) Existe.

178. a) Com todas as faces iguais a 60° podemos formar ângulos poliédricos de 3 faces, 4 faces ou 5 faces.
b) Com todas as faces iguais a 90° podemos formar ângulos poliédricos de 3 faces ou 4 faces.
c) Com todas as faces iguais a 120°, não é possível formar ângulo poliédrico.

179. O número máximo de arestas de um ângulo poliédrico convexo cujas faces são todas iguais a 70° é cinco.
Sendo n inteiro, temos:

$$n \cdot 70 < 360 \Rightarrow n < \frac{360}{70} \Rightarrow n = 5$$

Capítulo VII — Poliedros convexos

180. Resolvido.

181. Designemos por:
F_3: n.º de faces triangulares $\Rightarrow F_3 = 3$
F_4: n.º de faces quadrangulares $\Rightarrow F_4 = 1$
F_5: n.º de faces pentagonais $\Rightarrow F_5 = 1$
F_6: n.º de faces hexagonais $\Rightarrow F_6 = 2$
$F = F_3 + F_4 + F_5 + F_6 \Rightarrow F = 7$
$$A = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2} \Rightarrow A = \frac{30}{2} \Rightarrow A = 15$$
Da relação de Euler: $V - A + F = 2 \Rightarrow V - 15 + 7 = 2 \Rightarrow V = 10$

183. $A = V + 6$ Da relação de Euler:
$F = ?$ $V - A + F = 2 \Rightarrow$
$V - (V + 6) + F = 2 \Rightarrow F = 8$

185. F_3: n.º de faces triangulares
F_4: n.º de faces quadrangulares
$F_5 = 1$
$F_3 = F_4 \Rightarrow F = 2F_3 + 1$
$V = 11$
$$A = \frac{3F_3 + 4F_4 + 5 \cdot 1}{2} = \frac{7F_3 + 5}{2}$$
$$V - A + F = 2 \Rightarrow 11 - \frac{7F_3 + 5}{2} + 2F_3 + 1 = 2 \Rightarrow F_3 = 5$$
$-F = 2F_3 + 5 \Rightarrow F = 11$

186. F_3: n.º de faces triangulares
F_4: n.º de faces quadrangulares
$A = 20$ e $V = 10$
$V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - 20 + F = 2 \Rightarrow F = 12$
$$F_3 + F_4 = 12 \text{ e } \frac{3F_3 + 4F_4}{2} = 20 \text{ nos dão: } F_4 = 4 \text{ e } F_3 = 8$$

187. Resolvido.

189. $V = 5 + 7 + 9 + 8 = 29$
$$A = \frac{5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 8 \cdot 6}{2} = \frac{15 + 28 + 45 + 48}{2} = 68$$
$(V - A + F = 2, V = 29, A = 68) \Rightarrow F = 41$

194. Dados: $F_3 = 2k$, $F_4 = 3k$ $A = 2V$
$F = F_3 + F_4 \Rightarrow F = 5k$
$2A = 3F_3 + 4F_4 \Rightarrow 2A = 6k + 12k \Rightarrow A = 9k$
$V - A + F = 2 \Rightarrow 9k - 2 \cdot 9k + 2 \cdot 5k = 4 \Rightarrow k = 4$
$F = 5k \Rightarrow F = 5 \cdot 4 \Rightarrow F = 20$

195. $F_3 = F_5 + 2$ e $V = 7$
$$\left.\begin{array}{l} F = F_3 + F_4 + F_5 \Rightarrow F = F_4 + 2F_5 + 2 \\ 2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 \Rightarrow A = 2F_4 + 4F_5 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 2F - 1$$
$(V - A + F = 2, V = 7, A = 2F - 1) \Rightarrow F = 6 \Rightarrow F_4 + 2F_5 + 2 = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow F_4 + 2F_5 = 4$
Daí temos que $F_4 = 4 - 2F_5$ e, sendo F_5 um número inteiro positivo, o único valor para F_5 que resulta F_4 também inteiro e positivo é $F_5 = 1$.
Logo, $F_5 = 1$ e $F_4 = 2$, e então: $F_3 = 3$.

196. Nomenclatura: *V*, *A* e *F* para o poliedro primitivo, e *V'*, *A'* e *F'* para o novo poliedro.
$$\left.\begin{array}{l} F = F_3 + F_4 \\ A = 24 \Rightarrow V + F = 26 \end{array}\right\} \Rightarrow V + F_3 + F_4 = 26 \quad (1)$$
$A = 24 \Rightarrow 3F_3 + 4F_4 = 48$ (2)
$F' = F_4' = F_4 + 1$ e $V' = V - 1$
$2A' = 4F_4' \Rightarrow A' = 2F_4' \Rightarrow A' = 2F'$
Substituindo A' na relação de Euler no novo poliedro, vem:
$V' - A' + F' = 2 \Rightarrow V' - 2F' + F' = 2 \Rightarrow V' - F' = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (V - 1) - (F_4 + 1) = 2 \Rightarrow V - F_4 = 4$ (3)
Substituindo *V* de (3) em (1), temos: $F_3 + 2F_4 = 22$. (4)
Resolvendo o sistema (2) e (4), vem: $F_3 = 4$ e $F_4 = 9$.
Portanto, $F = F_3 + F_4 = 4 + 9 = 13$.

197. $F = a + b + c$
$$A = \frac{a \cdot \ell + bm + cn}{2}$$
Como *A* é um número inteiro e positivo, então $a\ell + bm + cn$ deve ser número par.
$V - A + F = 2 \Rightarrow V = 2 + A - F$
$$V = 2 + \frac{a\ell + bm + cn}{2} - (a + b + c)$$
$$V = \frac{4 + a\ell + bm + cn - 2a - 2b - 2c}{2}$$
$$V = \frac{4 + a(\ell - 2) + b(m - 2) + c(n - 2)}{2}$$

198. Resolvido.

200. $A = 28$
$F = F_3 + F_7 \Rightarrow 2A = 3F_3 + 7F_7 \Rightarrow 3F_3 + 7F_7 = 56$ (1)
$S = 64r \Rightarrow (V - 2) \cdot 4r = 64r \Rightarrow V = 18$
$(V - A + F = 2,\ A = 28,\ V = 18) \Rightarrow F = 12 \Rightarrow F_3 + F_7 = 12$ (2)
De (1) e (2) vem: $F_3 = 7$ e $F_7 = 5$.

203. O poliedro é o dodecaedro regular: $A = 30$, $F = 12$, $V = 20$.
Ao retirar as três faces adjacentes a um vértice comum, retiramos 3 arestas e o vértice comum. Ficamos então com $F' = 11$, $A' = 27$ e $V' = 19$ e notamos que $V' - A' + F' = 1$ vale para a superfície aberta que restou.

204. Resolvido.

205. Resolvido.

206. Resolvido.

207. Designemos por:
V_3: o número de ângulos triedros
V_4: o número de ângulos tetraédricos
V_5: o número de ângulos pentaédricos
V_6: o número de ângulos hexaédricos
etc.
Temos de provar que
$V_3 + V_5 + V_7 + \ldots$ é par.
De fato:
$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + 7V_7 + \ldots = 2A \Rightarrow$
$V_3 + V_5 + V_7 + \ldots = 2A - 2(V_3 + 2V_4 + 2V_5 + 3V_6 + 3V_7 + \ldots) =$
$= 2(A - V_3 - 2V_4 - 2V_5 - 3V_6 - 3V_7 - \ldots)$, o que prova a tese.

208. Usando a mesma nomenclatura dos problemas anteriores e sabendo que:
$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + 7V_7 \ldots$
$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 \ldots$
e que $V - A + F = 2$ (relação de Euler), temos:
$2V - 2A + 2F = 4 \Rightarrow 2F = 4 + 2A - 2V \Rightarrow$
$\Rightarrow 2F = 4 + (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + 7V_7 + \ldots) -$
$- 2(V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + \ldots) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2F = 4 + V_3 + 2V_4 + 3V_5 + 4V_6 + 5V_7 + \ldots$, o que prova a tese.

209. Resolvido.

210. Usando a mesma nomenclatura dos problemas anteriores, precisamos provar que $F_3 + V_3 \geqslant 8$.

Sabemos que:
$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots$
$F = F_3 + F_4 + F_5 + \ldots$
$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + 6V_6 + \ldots$
$V = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \ldots$
e a relação de Euler $V - A + F = 2$
nos dá: $4V - 4A + 4F = 8 \Rightarrow 4V + 4F = 8 + 4A$
Substituindo 2A com faces e 2A com vértices, vem:
$4(V_3 + V_4 + V_5 + \ldots) + 4(F_3 + F_4 + F_5 + \ldots) =$
$= 8 + (3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots) + (3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \ldots) \Rightarrow$
$\Rightarrow F_3 + V_3 = 8 + (F_5 + \ldots) + (V_5 + \ldots) \Rightarrow$
$\Rightarrow F_3 + V_3 \geqslant 8$

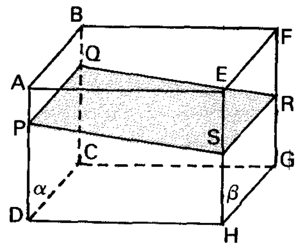
211. Utilizando a mesma nomenclatura dos problemas anteriores, vamos inicialmente provar que $3F \leqslant 2A$ e $3V \leqslant 2A$.
$F = F_3 + F_4 + F_5 + \ldots$
$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \ldots \Rightarrow$
$\Rightarrow 2A = (3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \ldots) + (F_4 + 2F_5 + \ldots) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2A = 3F + (F_4 + 2F_5 + \ldots) \Rightarrow 2A \geqslant 3F \Rightarrow 3F \leqslant 2A$ (1)
Analogamente, $3V \leqslant 2A$. (2)
Da relação de Euler $V - A + F = 2$, vem:
$A + 2 = V + F \Rightarrow 3A + 6 = 3V + 3F$.
Mas $3V \leqslant 2A \Rightarrow 3A + 6 \leqslant 2A + 3F \Rightarrow A + 6 \leqslant 3F$. (3)
De (1) e (3) $\Rightarrow A + 6 \leqslant 3F \leqslant 2A$.
Utilizando a desigualdade (1) e a relação de Euler, temos:
$$A + 6 \leqslant 3V \leqslant 2A$$

212. Sendo V o nº de átomos e A o nº de ligações entre eles, temos:
$2A = 12 \cdot 5 + 20 \cdot 6 \Rightarrow A = 90$
$V - A + F = 2 \Rightarrow V = 60$

Capítulo VIII – Prisma

Paralelepípedos: elementos, área e volume

227. Na figura, α é o plano da face $ABCD$ e β é o plano da face $EFGH$ e seja π o plano que intercepta as quatro arestas paralelas determinando o quadrilátero $PQRS$. Temos:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \,//\, \beta \Rightarrow \overline{PQ} \,//\, \overline{RS} \\ \text{Analogamente, } \overline{PR} \,//\, \overline{QS}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ PQRS é paralelogramo

241. $2(ab + ac + bc) = 62 \qquad a + b + c = 10$

Substituindo os dados na expressão $(a + b + c)^2$, temos:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow 100 = a^2 + b^2 + c^2 + 62 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 38 \Rightarrow d^2 = 38 \Rightarrow d = \sqrt{38}$ cm.

243. Sejam a_1, b_1 e c_1 as dimensões de um paralelepípedo e a_2, b_2 e c_2 as dimensões do outro. Temos:

diagonais iguais $\Rightarrow a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ (1)

e também $\quad a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$ (2)

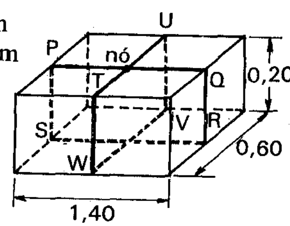
$$\left.\begin{array}{l}(a_1 + b_1 + c_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2(a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) \\ (a_2 + b_2 + c_2)^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + 2(a_2b_2 + a_2c_2 + b_2c_2)\end{array}\right\} \xRightarrow{(1)\text{ e }(2)}$$

$$\xRightarrow{(1)\text{ e }(2)} 2(a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1) = 2(a_2b_2 + a_2c_2 + b_2c_2)$$

248. Perímetro de PQRS $= 2 \times (1{,}40 + 0{,}20) = 3{,}20$ m

Perímetro de TUVW $= 2 \times (0{,}20 + 0{,}60) = 1{,}60$ m

Como é possível fazer o pacote usando apenas um nó, então serão gastos $3{,}20 + 1{,}60 + 0{,}20 = 5$ metros de corda.



250. Sejam x, y e z as dimensões. Temos:

$$\left(x = \frac{1}{r}\cdot k,\ y = \frac{1}{s}\cdot k,\ z = \frac{1}{t}\cdot k\right) \Rightarrow \left(x = \frac{st\,k}{rst},\ y = \frac{rt\,k}{srt},\ z = \frac{rs\,k}{rst}\right.$$

$$\left.K = \frac{k}{rst}\right) \Rightarrow (x = stK,\ y = rtK,\ z = rsK)\ (1) \qquad S = 2(xy + xz + yz)\ (2)$$

$$(1) \text{ em } (2) \Rightarrow S = 2K^2(rst^2 + rs^2t + r^2st) \Rightarrow K = \sqrt{\frac{S}{2rst(t + s + r)}}$$

Substituindo em (1), vem:

$$x = \sqrt{\frac{Sst}{2r(t + s + r)}},\ y = \sqrt{\frac{Srt}{2s(r + s + t)}},\ z = \sqrt{\frac{Srs}{2t(r + s + t)}}.$$

251. $ab = pk$ (1); $ac = qk$ (2); $bc = rk$ (3)

$$2(ab + ac + bc) = 2\ell^2 \Rightarrow k(p + q + r) = \ell^2 \Rightarrow k = \frac{\ell^2}{p + q + r}$$

Fazendo $[(1) : (2)] \times (3)$, temos:

$$ab \cdot \frac{1}{ac} \cdot bc = pk \cdot \frac{1}{qk} \cdot rk \Rightarrow b = \ell\sqrt{\frac{pr}{q(p + q + r)}}.$$

$$\text{Analogamente, } a = \ell\sqrt{\frac{pq}{r(p + q + r)}} \text{ e } c = \ell\sqrt{\frac{rq}{p(p + q + r)}}.$$

281. $a + b + c = 45$ (1); $a^2 + b^2 = 625$ (2); $2(ab + ac + bc) = 1300$ (3)

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,025 = 625 + c^2 + 1300 \Rightarrow c = 10$ cm.

Substituindo em (1) e em (2), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 35 \\ a^2 + b^2 = 625 \end{cases} \Rightarrow (a = 20 \text{ cm},\ b = 15 \text{ cm}) \text{ ou } (a = 15 \text{ cm},\ b = 20 \text{ cm}).$$

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = 20 \cdot 15 \cdot 10 \Rightarrow V = 3\,000 \text{ cm}^3$

Resposta: Dimensões: 20 cm, 15 cm, 10 cm; volume $= 3\,000$ cm^3.

282. Sendo x, y e z as dimensões, temos:

$x + y + z = 43a$ (1); $x^2 + y^2 + z^2 = 625a^2$ (2); $xy = 180a^2$. (3)

Calculando as dimensões:

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \Rightarrow$

$\Rightarrow (43a)^2 = 625a^2 + 2[180a^2 + z(x + y)] \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\,849a^2 = 625a^2 + 2[180a^2 + z(43 - z)] \Rightarrow z^2 - 43az + 432a^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (z = 27a$ ou $z = 16a$ (5))

$$z = 27a \text{ em } (1) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 16a \\ xy = 180 \cdot a^2 \end{cases} \Rightarrow \text{não fornece solução}$$

$$z = 16a \text{ em } (1) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 27a \\ xy = 180 \cdot a^2 \end{cases} \Rightarrow (x = 12a,\ y = 15a) \text{ ou } (x = 15a,\ y = 12a)$$

Volume:

$V = xyz \Rightarrow V = 12a \cdot 15a \cdot 16a \Rightarrow V = 2\,880a^3$

Área total:

$A_t = 2(xy + xz + yz) \Rightarrow A_t = 2(180a^2 + 15a \cdot 16a + 12a \cdot 16a) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 1\,224a^2$

285. Seja a a aresta do cubo. Temos:

$12a = 72 \Rightarrow a = 6$ cm

Sendo x, y e z as arestas do ortoedro, em ordem crescente, temos:

$x = \frac{2}{3} \cdot a \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot 6 \Rightarrow x = 4$ cm

$z = \frac{4}{3} \cdot x \Rightarrow z = \frac{4}{3} \cdot 4 \Rightarrow z = \frac{16}{3}$ cm

$4x + 4y + 4z = 72 \Rightarrow 4 \cdot 4 + 4 \cdot y + 4 \cdot \frac{16}{3} = 72 \Rightarrow y = \frac{26}{3}$ cm

$$\frac{V_{ortoedro}}{V_{cubo}} = \frac{xyz}{a^3} \Rightarrow \frac{V_{ortoedro}}{V_{cubo}} = \frac{4 \cdot \frac{26}{3} \cdot \frac{16}{3}}{6^3} \Rightarrow \frac{V_{ortoedro}}{V_{cubo}} = \frac{208}{243}$$

290. Sejam a, a e b as dimensões do paralelepípedo. Temos:

$$\begin{cases} \sqrt{2a^2 + b^2} = 9 \\ 2(a^2 + 2ab) = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 + b^2 = 81 \quad (1) \\ a^2 + 2ab = 72 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow (a - b)^2 = 9 \Rightarrow (a - b = +3$ ou $a - b = -3)$

Com $a - b = 3$, temos:

$a - b = 3 \Rightarrow b = a - 3$.

Substituindo em (2): $a^2 + 2a(a - 3) = 72 \Rightarrow a^2 - 2a - 24 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a = -4$ (não serve) ou $a = 6$ cm$) \Rightarrow b = 3$ cm $\Rightarrow V = 6 \cdot 6 \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 108$ cm^3.

Com $a - b = -3$, vem:

$a - b = -3 \Rightarrow b = a + 3$.

Substituindo em (2) e procedendo de modo análogo, obtemos

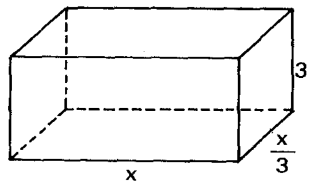
$(a = 4$ cm e $b = 7$ cm$) \Rightarrow V = 4 \cdot 4 \cdot 7 \Rightarrow V = 112$ cm^3.

291. Seja a a aresta do cubo. Temos:

$6a^2 = 216 \Rightarrow a = 6$ cm

$2\left(x \cdot \frac{x}{3} + x \cdot 3 + \frac{x}{3} \cdot 3\right) = 216 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6(\sqrt{10} - 1)$ cm $=$



$$\frac{V_{cubo}}{V_{ortoedro}} = \frac{a^3}{x \cdot \frac{x}{3} \cdot 3} \Rightarrow \frac{V_{cubo}}{V_{ortoedro}} = \frac{\cancel{6^3}}{\cancel{6^2}(\sqrt{10} - 1)^2} \Rightarrow \frac{V_{cubo}}{V_{ortoedro}} = \frac{6}{11 - 2\sqrt{10}}.$$

296. $a + a + \frac{2}{3} a = 16 \Rightarrow a = 6$ cm

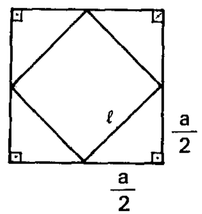
$\ell^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \ell^2 = \frac{6^2}{4} + \frac{6^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = 3\sqrt{2}$ cm

$V_{cubo} = \ell^3 \Rightarrow V_{cubo} = (3\sqrt{2})^3 \Rightarrow$

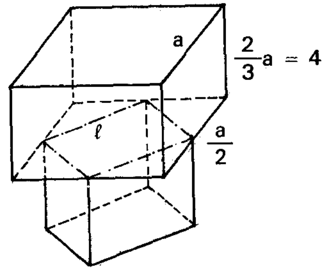
$\Rightarrow V_{cubo} = 54\sqrt{2}$ cm^3

base do ortoedro



$V_{ortoedro} = a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{ortoedro} = \frac{2}{3} \cdot 6^3 = 144$ cm^3



Volume (V) e área (S) do sólido:

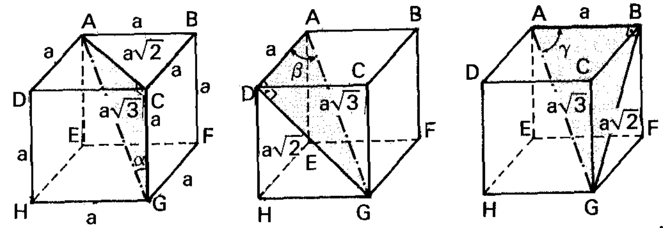
$V = V_{cubo} + V_{ortoedro} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{total} = 18(8 + 3\sqrt{2})$ cm^3

$S = 5 \cdot (3\sqrt{2})^2 + 4(6 \cdot 4) + 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 240$ cm^2

298. Considere o cubo de aresta a, da figura.

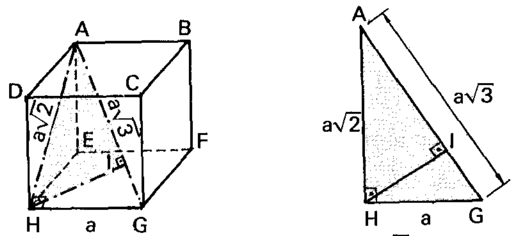
a)



a) $\alpha = \text{arc sen} \frac{\sqrt{6}}{3}$ (1) $\quad \beta = \text{arc sen} \frac{\sqrt{6}}{3}$ (2) $\quad \gamma = \text{arc sen} \frac{\sqrt{6}}{3}$ (3)

(1), (2) e (3) $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

b)



Rel. métricas $\Rightarrow GH^2 = AG \cdot GI \Rightarrow a^2 = a\sqrt{3} \cdot GI \Rightarrow GI = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow GI = \frac{AG}{3}$

299. $S_{circ.} = 7{,}29\pi \Rightarrow \pi R^2 = 7{,}29\pi \Rightarrow R = 2{,}7$ cm

a) Seja a a medida da aresta do cubo.

$a = R\sqrt{2} \Rightarrow a = 2{,}7\sqrt{2}$ cm

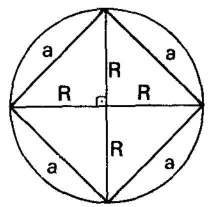
$d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = 2{,}7\sqrt{2}\sqrt{3} \Rightarrow d = 2{,}7\sqrt{6}$ cm

b) $S = 6a^2 \Rightarrow S = 6 \cdot (2{,}7\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

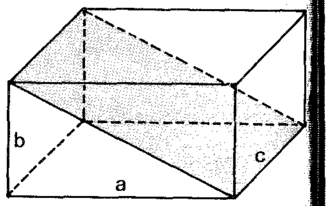
$\Rightarrow S = 87{,}48$ cm^2

c) $V = a^3 \Rightarrow V = (2{,}7\sqrt{2})^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 5{,}4\sqrt{2}$ cm^3



300. O quadrado da área da secção indicada na figura é $(a^2 + b^2) \cdot c^2$. Notemos que temos 2 secções com essas condições.



Então:

soma dos quadrados das áreas das 6 secções =

$= 2(a^2 + b^2)c^2 + 2(b^2 + c^2)a^2 + 2(a^2 + c^2) \cdot b^2 =$

$= 2[a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2] = 2[2(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2)] =$

= dobro da soma dos quadrados das 6 faces.

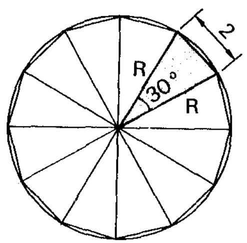
337. Cálculo da área da base:

Lei dos cossenos:

$2^2 = R^2 + R^2 - 2RR \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = 4(2 + \sqrt{3})\ m^2$

A área da base é igual a 12 vezes o valor da área do triângulo isósceles destacado na figura ao lado.



$B = 12 \cdot \dfrac{R \cdot R \cdot \text{sen } 30°}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = 12 \cdot 4(2 + \sqrt{3}) \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow B = 12(2 + \sqrt{3})\ m^2$

Cálculo do volume:

$V = B \cdot h \Rightarrow V = 12(2 + \sqrt{3}) \cdot 10 \Rightarrow V = 120(2 + \sqrt{3})\ m^3.$

Prisma: áreas e volume

339. Cálculo da área da base:

$\cos 30° = \dfrac{1}{\ell} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\ell} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ m$

$B = \dfrac{3}{2}\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = 2\sqrt{3}\ m^2$

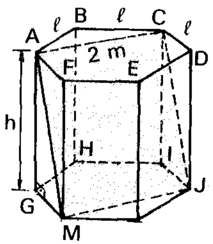


Fig. 1

Cálculo da altura:

$AG^2 = AM^2 - GM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 2^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow h = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\ m$

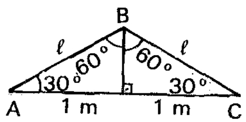


Fig. 2

Volume:

$V = B \cdot h \Rightarrow V = (2\sqrt{3})\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right) \Rightarrow V = 4\sqrt{2}\ m^2$

340. Sejam p e ℓ o semiperímetro e a aresta da base, respectivamente. Temos:

$A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow 12 = 2ph + 2 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \ell^2\sqrt{3} \Rightarrow 12 = 2p + 3\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 = 6\ell + 3\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\ell^2 + 2\ell - 4 = 0 \Rightarrow \ell = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4(1 + 4\sqrt{3})}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = \dfrac{(\sqrt{1 + 4\sqrt{3}} - 1)\sqrt{3}}{3}$

$B = \dfrac{3}{2}\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow B = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{(\sqrt{1 + 4\sqrt{3}} - 1)\sqrt{3}}{3}\right]^2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

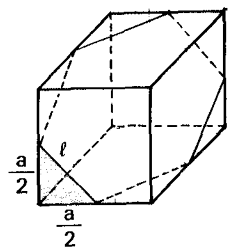
$\Rightarrow B = (\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3 + 12\sqrt{3}})\ dm^2$

$V = B \cdot 1 \Rightarrow V = (\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3 + 12\sqrt{3}})\ dm^3$

347. Seja a a aresta do cubo.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, obtemos

$\ell = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Sendo R o raio do círculo circunscrito ao hexágono, vem:

$R = \ell \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\dfrac{S_{hex.}}{S_{círc.}} = \dfrac{\frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3}}{\pi R^2} \Rightarrow \dfrac{S_{hex.}}{S_{círc.}} = \dfrac{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow \dfrac{S_{hex.}}{S_{círc.}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

348. Seja ℓ o lado do hexágono em questão e a a aresta do cubo. Temos:

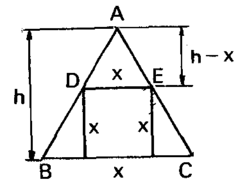
$6a^2 = 31{,}74 \Rightarrow a = 2{,}3\ cm$

$\ell = \dfrac{a}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \dfrac{2{,}3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2p = 6 \cdot \ell \Rightarrow 2p = 6{,}9\sqrt{2}\ cm$

$\ell_3 = \dfrac{2p}{3} \Rightarrow \ell_3 = \dfrac{6{,}9\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \ell_3 = 2{,}3\sqrt{2}\ cm$

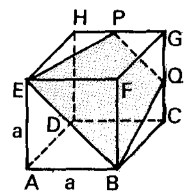
$h = \dfrac{\ell_3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \dfrac{2{,}3\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \dfrac{2{,}3\sqrt{6}}{2}\ cm$

$\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{H}{h - x} = \dfrac{BC}{DE} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \frac{\frac{2,3\sqrt{6}}{2}}{\frac{2,3\sqrt{6}}{2} - x} = \frac{2,3\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x = \frac{23\sqrt{6}(2 - \sqrt{3})}{10} \text{ cm}$$

349. a) Sendo o plano da face $ABFE$ paralelo ao plano da face $CGHD$, um plano que intercepte os dois o faz segundo retas paralelas. Logo, $\overline{PQ} \mathbin{//} \overline{BE}$. (1)
$\Delta PHE \equiv \Delta QCB \Rightarrow \overline{PE} \equiv \overline{QB}$ (2)
((1) e (2)) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ PEBC é trapézio isósceles.



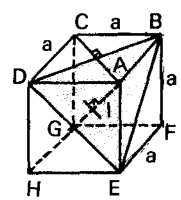
b) $BE^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow BE = a\sqrt{2}$

$$BQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow BQ = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow PE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$PQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

350. a) $\overline{BD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{BE}$ (diagonais das faces) $\Rightarrow$ ΔBDE é equilátero, de lado $a\sqrt{2}$, em que a é aresta do cubo.

b) Os pontos B, D e E estão a igual distância de A e G e pertencem, portanto, ao plano mediador de $\overline{AG}$.



Então a diagonal $\overline{AG}$ é perpendicular ao plano (B, D, E) num ponto I que é o ponto médio de $\overline{AG}$ e o baricentro do triângulo BDE.

c) $S_{BDE} = \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{BDE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Problemas gerais sobre prismas

368. Sejam $a - r$, a, $a + r$ as dimensões. Temos:

$$\begin{cases} 2[(a - r)a + (a - r)(a + r) + a(a + r)] = S \\ (a - r)^2 + a^2 + (a + r)^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r^2 = 6a^2 - S \ (1) \\ 2r^2 = d^2 - 3a^2 \ (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a^2 - S = d^2 - 3a^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{d^2 + S}}{3}$$

Substituindo em (1):

$$2r^2 = 6 \cdot \frac{d^2 + S}{9} - S \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2d^2 - S}{6}}$$

As dimensões devem ser:

$$\frac{\sqrt{d^2 + S}}{3} - \sqrt{\frac{2d^2 - S}{6}}, \ \frac{\sqrt{d^2 + S}}{3}, \ \frac{\sqrt{d^2 + S}}{3} + \sqrt{\frac{2d^2 - S}{6}}$$

com $2d^2 - S \geqslant 0 \Rightarrow d^2 \geqslant \frac{S}{2}$ (as dimensões devem ser reais)

e

$$\frac{\sqrt{d^2 + S}}{3} - \sqrt{\frac{2d^2 - S}{6}} > 0 \Rightarrow \frac{d^2 + S}{9} > \frac{2d^2 - S}{6} \Rightarrow 2d^2 + 2S > 6d^2 - 3S \Rightarrow$$

$\Rightarrow d^2 < \frac{5S}{4}$ (as dimensões devem ser positivas).

Note que, se $d^2 = \frac{S}{2}$, então o paralelepípedo retângulo será um cubo de aresta $a = \sqrt{\frac{d^2 + S}{3}}$.

369. Sejam:
S_1 = soma dos diedros formados pelas faces laterais do prisma triangular com uma base;
S_2 = soma dos diedros formados pelas faces laterais do prisma triangular com a outra base;
S_{DT} = soma dos diedros de um triedro.
Temos:

$$2r < S_{DT} < 6r$$

Considerando a soma dos triedros de uma base, temos:
$6r < S_{DT_1} + S_{DT_2} + S_{DT_3} < 18r \Rightarrow 6r < 2S_1 + 2r < 18r \Rightarrow$
$\Rightarrow 4r < 2S_1 < 16r \Rightarrow 2r < S_1 < 8r$ ①
Note que $S_1 + S_2 = 6r \Rightarrow S_1 = 6r - S_2$.
Substituindo em ①:
$2r < 6r - S_2 < 8r \Rightarrow -4r < -S_2 < 2r \Rightarrow S_2 < 4r$. ②
De ① e ② e chamando S_1 e S_2 de S_D, vem:

$$2r < S_D < 4r.$$

370. Usando a mesma notação e o mesmo raciocínio do exercício precedente, temos:
$n \cdot 2r < S_{DT_1} + S_{DT_2} + \ldots + S_{DT_n} < n \cdot 6r \Rightarrow$
$\Rightarrow n \cdot 2r < 2S_1 + (n - 2) \cdot 2r < n \cdot 6r \Rightarrow nr < S_1 + nr - 2r < n \cdot 3r \Rightarrow$
$\Rightarrow 2r < S_1 < (n + 1) \cdot 2r$ ①
$S_1 + S_2 = n \cdot 2r \Rightarrow S_1 = n \cdot 2r - S_2$
Substituindo em ①:
$2r < n \cdot 2r - S_2 < (n + 1) \cdot 2r \Rightarrow 2r - n \cdot 2r < -S_2 < (n + 1) \cdot 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(1 - n) \cdot r < -S_2 \Rightarrow S_2 < (n - 1) \cdot 2r$ ②

De ① e ② e chamando S_1 e S_2 de S_D:

$$2r < S_D < (n - 1) \cdot 2r.$$

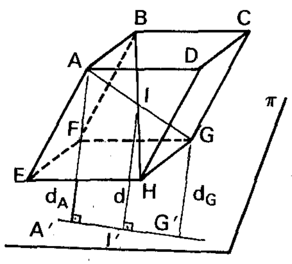
371. Sejam V o volume e S a área da secção normal do prisma. Sendo:
ℓ: lado do polígono equilátero determinado pela secção normal;
$d_1, d_2, \ldots, d_n$: distâncias do ponto no interior do prisma às faces;
D_1, D_2: distâncias do ponto no interior do prisma às bases.
Assim, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\ell d_1}{2} + \dfrac{\ell d_2}{2} + \ldots + \dfrac{\ell d_n}{2} = S \\ D_1 \cdot S + D_2 \cdot S = V \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \dfrac{2S}{\ell} \quad (1) \\ D_1 + D_2 = \dfrac{V}{S} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow d_1 + d_2 + \ldots + d_n + D_1 + D_2 = \frac{2S}{\ell} + \frac{V}{S}$$

372. Seja o paralelepípedo $ABCDEFGH$; I o ponto de interseção de suas diagonais; π um plano que não intercepta o paralelogramo; d_A, d e d_G as distâncias dos pontos A, I e G ao plano π. Como A, I e G são colineares, também o serão A', I' e G', suas projeções ortogonais sobre π. Então:



$$\left.\begin{array}{l} \text{I é ponto médio de } \overline{AG} \\ \overline{II'} \; // \; \overline{AA'} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{A'I'} \equiv \overline{I'G'} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ d é base média do trapézio AGG'A'. Então: $d_A + d_G = 2d$.

Analogamente:

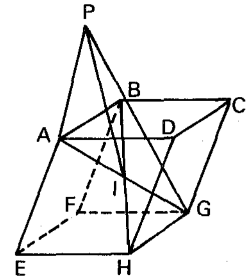
$d_B + d_H = 2d$; $d_C + d_E = 2d$; $d_D + d_F = 2d$

E dessas 4 igualdades vem:

$d_A + d_B + d_C + d_D + d_E + d_F + d_G = 8d$.

373. d: a distância de P ao ponto I
Sejam: $d_A, d_B, \ldots, d_H$ as distâncias de P aos vértices $A, B, \ldots H$; D_1, D_2, D_3 e D_4 as diagonais AG, BH, CE e DF; I o ponto de interseção das diagonais.

Aplicando a relação de Stewart ao triângulo PAG, temos:



$d_A^2 \cdot IG + d_G^2 \cdot AI - d^2 \cdot AG =$
$= AI \cdot IG \cdot AG \Rightarrow$

$$\Rightarrow d_A^2 \cdot \frac{D_1}{2} + d_G^2 \cdot \frac{D_1}{2} - d^2 \cdot D_1 = \frac{D_1}{2} \cdot \frac{D_1}{2} \cdot D_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_A^2 + d_G^2 = 2d^2 + \frac{D_1^2}{2}. \quad ①$$

Analogamente, obtemos: $d_B^2 + d_H^2 = 2d^2 + \dfrac{D_2^2}{2}$ ②

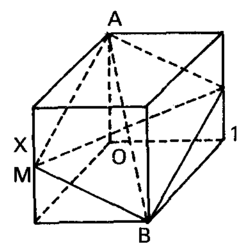
$$d_C^2 + d_E^2 = 2d^2 + \frac{D_3^2}{2} \quad ③$$

$$d_D^2 + d_F^2 = 2d^2 + \frac{D_4^2}{2} \quad ④$$

$$① + ② + ③ + ④ \Rightarrow d_A^2 + d_B^2 + \ldots + d_H^2 = 8d^2 + \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2)$$

Em lugar da relação de Stewart, da Geometria Plana, poderíamos usar, também de lá, a expressão da mediana de um triângulo em função dos lados.

374. Seja AB a diagonal do cubo de centro O e seja X um ponto de uma aresta. A secção do cubo por um plano que passa por $\overline{AB}$ será mínima no caso em que a distância de X ao ponto O seja mínima. Isso ocorre para X coincidindo com o ponto médio M da aresta. A distância $\overline{OM}$ (cateto) é menor que qualquer outra distância $\overline{OX}$ (hipotenusa).
A área da secção mínima é duas vezes a área do ΔABM.



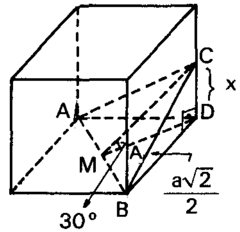
$$\text{Área} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (OM) = a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

375. Seja $\overline{AB}$ uma diagonal de face do cubo e (A, B, C) o plano que forma 30° com a face. Esse plano determina no cubo um tetraedro tri-retangular D(ABC) em que D é o triedro tri-retângulo.

O volume V desse tetraedro é dado por:

$$V = \frac{1}{6}\,(DA)\cdot(DB)\cdot(DC) \quad (1)$$

conforme aparece no exercício *400*.
Como $DA = DB = a$, basta calcular $DC = x$ para resolvermos o problema.
É o que segue:



$$\left(\Delta CDM,\ CD = x,\ \hat{M} = 30°,\ DM = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Substituindo em (1):

$$V = \frac{1}{6}\cdot a\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}.$$

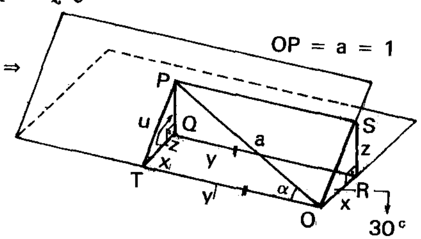
O volume V' do outro sólido resultante é obtido por diferença:

$$V' = a^3 - V \Rightarrow V' = \frac{36-\sqrt{6}}{36}\,a^3.$$

376. a) Considerando os dados do problema e fazendo $OR = x$, $OT = y$, $SR = z$ e $OS = u$, temos:

$$V = B\cdot h \Rightarrow V = \frac{x\cdot z}{2}\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}\,xyz. \quad (1)$$



No ΔPTO temos: $y = \cos\alpha$ e $u = \text{sen}\,\alpha$.

No ΔPQT vem: $x = u\cos 30° = \frac{u\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,\alpha$

$$z = u\,\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}\,u = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha$$

Substituindo x, y e z em (1), vem:

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{8}\,\text{sen}^2\alpha\cdot\cos\alpha.$$

b) V é máximo se a derivada de V em relação a α for nula.

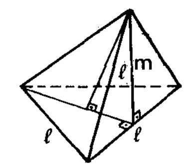
$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{8}\,(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \text{sen}^3\alpha) = 0 \Rightarrow$$

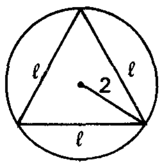
$$\Rightarrow \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2 \Rightarrow \text{tg}^2\alpha = 2$$

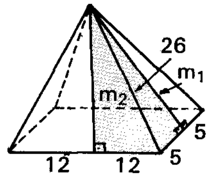
e, como $0° < \alpha < 90°$, temos: $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$.

Capítulo IX — Pirâmide

398. Dados: $m = 7$, $R = 2$.
$\ell = R\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3}$ cm







$$A_\ell = 3\cdot\frac{\ell\cdot m}{2} \Rightarrow A_\ell = 3\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot 7}{2} \Rightarrow A_\ell = 21\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$B = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{(2\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

$$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 21\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

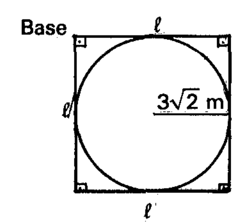
403. $d^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow d = 26$ cm
$B = 10\cdot 24 \Rightarrow B = 240\ \text{cm}^2$

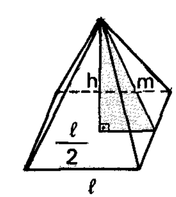
$26^2 = m_1^2 + 5^2 \Rightarrow m_1 = \sqrt{651}$ cm
$26^2 = m_2^2 + 12^2 \Rightarrow m_2 = 2\sqrt{133}$ cm

$$A_t = 2\left(\frac{24\cdot m_2}{2}\right) + 2\left(\frac{10\cdot m_1}{2}\right) + B \Rightarrow A_t = 24\cdot 2\sqrt{133} + 10\cdot\sqrt{651} + 240 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = 2(5\sqrt{651} + 24\sqrt{133} = 120)\ \text{cm}^2$$

409. $\ell = 2R \Rightarrow \ell = 2\cdot 3\sqrt{2}$ m $\Rightarrow \ell = 6\sqrt{2}$ m
$B = \ell^2 \Rightarrow B = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow B = 72\ \text{m}^2$





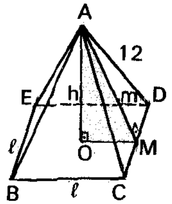
Seja *m* a medida do apótema da pirâmide.
Daí:

$$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 4\left(\frac{\ell\cdot m}{2}\right) + \ell^2 \Rightarrow$$

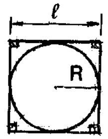
$$\Rightarrow\ 192 = 2 \cdot 6\sqrt{2}\,m + 72 \ \Rightarrow\ m = 5\sqrt{2}\,m$$

$$m^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \ \Rightarrow\ (5\sqrt{2})^2 = h^2 + (3\sqrt{2})^2 \ \Rightarrow\ h = 4\sqrt{2}\,m$$

430.



Base



$\ell = 2R \ \Rightarrow\ \ell = 2 \cdot 6 \ \Rightarrow\ \ell = 12$ cm

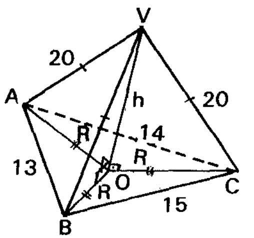
ΔAMD: $12^2 = m^2 + 6^2 \ \Rightarrow\ m = 6\sqrt{3}$ cm

ΔAOM: $m^2 = h^2 + R^2 \ \Rightarrow\ (6\sqrt{3})^2 = h^2 + 6^2 \ \Rightarrow\ h = 6\sqrt{2}$ cm

$B = \ell^2 \ \Rightarrow\ B = 12^2 \ \Rightarrow\ B = 144\ cm^2$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \ \Rightarrow\ V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6\sqrt{2} \ \Rightarrow\ V = 288\sqrt{2}\ cm^3$$

436.



Cálculo da área da base:

$a = 13$ m; $b = 14$ m; $c = 15$ m.

$$p = \frac{a + b + c}{2} \ \Rightarrow\ p = \frac{13 + 14 + 15}{2} \ \Rightarrow\ p = 21\ m$$

$$B = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \ \Rightarrow\ B = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \ \Rightarrow\ B = 84\ m^2$$

Se as arestas laterais são congruentes, então a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o circuncentro *O* (centro da circunferência circunscrita) do triângulo *ABC*. Então:

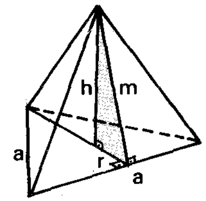
$$B = \frac{abc}{4R} \ \Rightarrow\ 84 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4R} \ \Rightarrow\ R = \frac{65}{8}\ m$$

$$\Delta VOA:\ h^2 = 20^2 - \left(\frac{65}{8}\right)^2 \ \Rightarrow\ h = \frac{15\sqrt{95}}{8}\ m$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \ \Rightarrow\ V = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{15\sqrt{95}}{8} \ \Rightarrow\ V = \frac{105\sqrt{95}}{2}\ m^3$$

441. Sejam:

a: aresta da base;
r: raio da circunferência inscrita na base;
h: altura da pirâmide;
m: apótema da pirâmide;
p: semiperímetro da base.



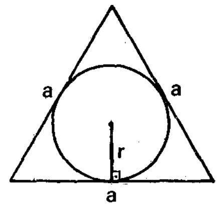
Temos:

$$B = p \cdot r \ \Rightarrow\ \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a}{2} \cdot 2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a = 4\sqrt{3}\ cm$$

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \ \Rightarrow\ B = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ B = 12\sqrt{3}\ cm^2$$

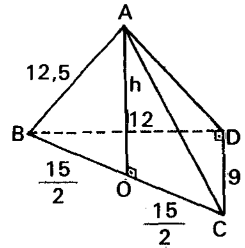


$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = 3 \cdot \dfrac{a \cdot m}{2} \\ A_\ell = A_t - B \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{3am}{2} = A_t - B \ \Rightarrow\ \frac{3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot m}{2} = 36\sqrt{3} - 12\sqrt{3} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m = 4\ cm$$

$$m^2 = h^2 + r^2 \ \Rightarrow\ 4^2 = h^2 + 2^2 \ \Rightarrow\ h = 2\sqrt{3}\ cm$$

451. A base é um triângulo retângulo. Então, o circuncentro da base é o ponto médio da hipotenusa desse triângulo.



ΔAOB: $h^2 = (12{,}5)^2 - (7{,}5)^2 \ \Rightarrow$

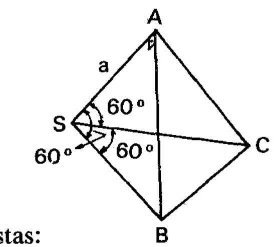
$\Rightarrow\ h = 10$ cm

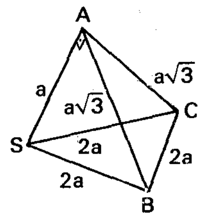
$$B = \frac{9 \cdot 12}{2} \ \Rightarrow\ B = 54\ cm^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ V = \frac{1}{3} \cdot 54 \cdot 10 \ \Rightarrow\ V = 180\ cm^3$$

462.





a) Cálculo das arestas:

$$\cos 60° = \frac{SA}{SB} \ \Rightarrow\ \frac{1}{2} = \frac{a}{SB} \Rightarrow SB = 2a$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{AB}{SB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{2a} \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$$

Lei dos cossenos no ΔSBC:

$$BC^2 = (2a)^2 + (2a)^2 - 2 \cdot (2a)(2a)\cos 60^\circ \Rightarrow BC = 2a$$

Note que $SC = SB$ e $AC = AB$. Portanto, $SC = 2a$ e $AC = a\sqrt{3}$.

b) Cálculo da área total:

$$\text{Face SAB} = \frac{a \cdot 2a \cdot \text{sen } 60^\circ}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

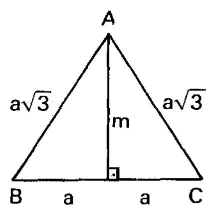
$$\text{Face SBC} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

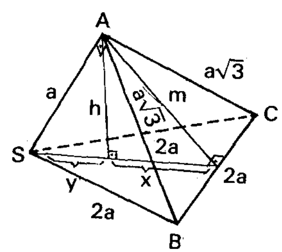
$$\text{Face ABC} = \frac{2a \cdot m}{2} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{2} = a^2\sqrt{2}$$

$$\text{Face SAC} = \text{SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_t = \text{SAB} + \text{SAC} + \text{SBC} + \text{ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{2} \Rightarrow A_t = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})\, a^2$$





$$m^2 = (a\sqrt{3})^2 - a^2 \Rightarrow m = a\sqrt{2}$$

c) Cálculo do volume:

$$\left.\begin{aligned} h^2 &= m^2 - x^2 \\ h^2 &= a^2 - y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m^2 - x^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow (a\sqrt{2})^2 - x^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + y)(x - y) = a^2 \Rightarrow \frac{2a\sqrt{3}}{2}(x - y) = a \Rightarrow$$

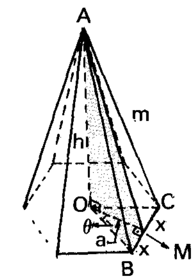
$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow x - y &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ x + y &= \frac{2a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right| \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$h^2 = m^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 \Rightarrow h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

464. Sejam:

ℓ: número de lados da base da pirâmide
a: apótema desse polígono
2x: medida da aresta da base
m: apótema da pirâmide
θ: metade do ângulo central que subtende a aresta da base.



Temos:

$$(\ell - 2) \cdot \pi = n\pi \Rightarrow \ell = n + 2$$

$$\frac{A_\ell}{B} = k \Rightarrow \frac{\ell \cdot \frac{2x \cdot m}{2}}{\ell \cdot \frac{2x \cdot a}{2}} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = k \cdot a$$

$$\Delta AOM: m^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow (ka)^2 = h^2 + a^2 \Rightarrow a = \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

$$2\theta = \frac{2\pi}{\ell} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{n + 2}$$

$$\Delta OMB: \text{tg } \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right) = \frac{x}{h/\sqrt{k^2 - 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}} \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right)$$

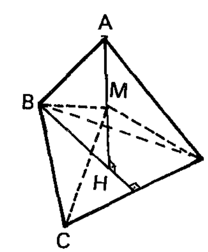
$$B = \ell \cdot \frac{2x \cdot a}{2} \Rightarrow B = (n + 2) \cdot \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}} \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right) \cdot \frac{h}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{(n + 2)}{(k^2 - 1)} \cdot h^2 \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right)\right] \cdot h =$$

$$= \frac{(n + 2)h^3}{3(k^2 - 1)} \text{tg}\left(\frac{\pi}{n + 2}\right)$$

467. Seja a a medida da aresta do tetraedro regular da figura ao lado.

Temos:



$$AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

H é baricentro do $\Delta BCD \Rightarrow$

$$\Rightarrow BH = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta MHB: (MB)^2 = (MH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow (MB)^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ MB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Analogamente: $MC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ e $MC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

No ΔBMC temos:

$$(MB)^2 + (MC)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 = (BC)^2 \Rightarrow$$

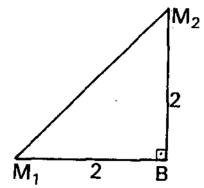
$\Rightarrow \ (MB)^2 + (MC)^2 = (BC)^2 \Rightarrow \Delta BMC$ é retângulo em M.

Analogamente para ΔBMD e ΔCMD.

Logo, o triedro de vértice *M* e arestas $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ e $\vec{MD}$ é um triedro tri-retângulo.

472. a) Na figura ao lado temos uma parte da base:

$(M_1M_2)^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow M_1M_2 = 2\sqrt{2}$ m.



b) $M_1M_2M_3M_4$ é quadrado de lado $M_1M_2 = 2\sqrt{2}$ m.

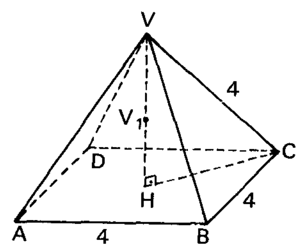
Área de $M_1M_2M_3M_4 = (2\sqrt{2})^2 = 8$ m²

c) $AC = 4\sqrt{2} \Rightarrow HC = 2\sqrt{2}$ m

$(VH)^2 = (VC)^2 - (HC)^2$

$(VH)^2 = 4^2 - (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow VH = 2\sqrt{2}$ m $\Rightarrow V_1H = \sqrt{2}$ m



Seja *V* o volume da pirâmide $V(M_1M_2M_3M_4)$.

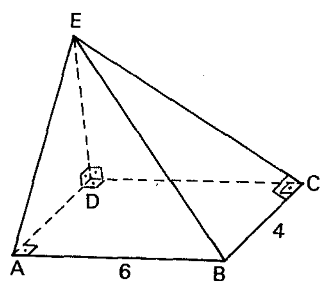
$V = \dfrac{1}{3} \cdot B \cdot h$ em que $B = 8$ e $h = \sqrt{2}$ e

então: $V = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}\ m^3$.

473. a) Sendo $\overleftrightarrow{DE}$ perpendicular ao plano *ABCD*, pela definição, vem que $\overleftrightarrow{DE}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{DA}$ e a $\overleftrightarrow{DC}$.

Logo, os triângulos *ADE* e *CDE* são triângulos retângulos em *D*.

Sendo $\overleftrightarrow{ED}$ perpendicular ao plano *ABCD* e $\overleftrightarrow{BC}$ perpendicular à reta $\overleftrightarrow{DC}$, pelo teorema das três perpendiculares, vem que $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{EC}$.



Logo, o triângulo *BCE* é retângulo em *C*.

Analogamente, o triângulo *BAE* é retângulo em *A*.

b) Cálculo da área total:

Sejam:

S_1 = área ΔADE, S_2 = área ΔCDE, S_3 = área ΔBCE, S_4 = área ΔBAE e B = área do retângulo ABCD.

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos: $CE = 10\ m$ e $AE = 4\sqrt{5}\ m$.

E então: $S_1 = 16$, $S_2 = 24$, $S_3 = 20$, $S_4 = 12\sqrt{5}$ e $B = 24$.

Logo: $A_\ell = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 60 + 12\sqrt{5} = 12(5 + \sqrt{5})$

$A_t = A_\ell + B = 60 + 12\sqrt{5} + 24 = 12(7 + \sqrt{5})$ m²

474. Sejam:

h: altura da pirâmide quadrangular regular;

m: apótema dessa pirâmide;

a: aresta da base dessa pirâmide.

Temos: $S + a^2 = A \Rightarrow S - A = a^2$ (1); $A = 2a \cdot m \Rightarrow \dfrac{A}{2a} = m$ (2)

$$h^2 = m^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2m^2 - a^2}}{2} \quad (3)$$

$$V = \frac{a^2 \cdot h}{3} \xRightarrow{(1)} V = \frac{(S - A) \cdot h}{3} \xRightarrow{(3)} V = \frac{(S - A)\sqrt{2m^2 - a^2}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)^2(2m^2 - a^2) \xRightarrow{(2)} 36V^2 = (S - A)^2\left[2 \cdot \frac{A^2}{4a^2} - (S - A)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)^2\left[\frac{A^2}{2a^2} - (S - A)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)^2\left[\frac{A^2}{2(S - A)} - (S - A)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)^2\left[\frac{A^2 - 2(S^2 - 2AS + A^2)}{2(S - A)}\right] \Rightarrow$$

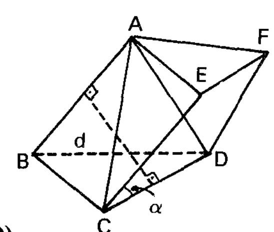
$$\Rightarrow 36V^2 = (S - A)\frac{[-2S^2 + 4AS]}{2} \Rightarrow 36V^2 = S(S - A)(2A - S)$$

475. Sejam:

$S_{BCD} = B$;

h: altura de *ABCD* relativa à base *B*;

d: menor distância entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



Com a mesma base *BCD* da pirâmide construímos o prisma *AEFBCD*.

O volume desse prisma é a soma dos volumes de duas pirâmides, a saber: A(BCD) e A(CEFD).

Sendo *S* a área do paralelogramo *CEFD*, temos:

Volume AEFBCD = Volume A(BCD) + Volume A(CEFD) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Bh = \frac{Bh}{3} + \frac{S \cdot d}{3} \Rightarrow \frac{Bh}{3} = \frac{d \cdot S}{6} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{d \cdot S}{6}$$

Nota:
Sendo α o ângulo entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (que é o ângulo entre EF e CD), temos que $S = (EC)(CD)\ \text{sen}\ \alpha$ e então:

$$V_{ABCD} = \frac{d \cdot EC \cdot CD \cdot \text{sen}\ \alpha}{6} = \frac{1}{6} d \cdot (AB) \cdot (CD) \cdot \text{sen}\ \alpha.$$

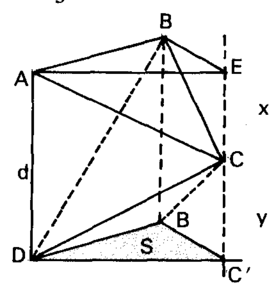
Portanto, o volume de um tetraedro é igual à sexta parte do produto de duas arestas opostas pela distância entre elas e pelo seno do ângulo por elas formado.

476. S é a área da projeção $B'C'D$ do tetraedro $ABCD$ sobre um plano que passa por D e é perpendicular a $\overline{AD}$.
B' e C' são as respectivas projeções de B e C.
Consideremos o prisma $DB'C'ABE$ e seja d a medida de $\overline{AD}$.
Notemos que $V_{ABCD} = V_{BB'DC}$, pois $ABB'D$ é paralelogramo e os triângulos ABD e $B'BD$ são equivalentes.
Seja $CE = x$ e $CC' = y$.
Temos:
Volume de C(B′C′D) + Volume de C(BEA) + Volume de C(ABD) + + Volume de C(B′BD) = Volume do prisma DB′C′ABE $\Rightarrow$

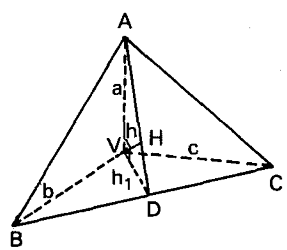
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot S \cdot y + \frac{1}{3} \cdot S \cdot x + V_{ABED} + V_{ABCD} = S \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} S(x + y) + 2V_{ABCD} = Sd \Rightarrow \frac{1}{3} Sd + 2V_{ABCD} = Sd \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{Sd}{3}.$$



478. Seja $V(ABC)$ o tetraedro em que V é triedro tri-retângulo e $\overline{VH}$ sua altura. Consideremos ainda a altura $\overline{VD}$ do triângulo retângulo BVC e observemos o triângulo AVD retângulo em V.
$VD = h_1$ e $VH = h$



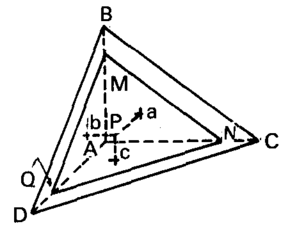
No triângulo retângulo BVC temos: $\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

(procure provar esta relação com base nas relações métricas no triângulo retângulo).

No triângulo retângulo AVD temos: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{h_1^2}$.

Substituindo $\frac{1}{h_1^2}$ nessa última relação, vem: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

479. a) Sendo P um ponto do interior do tetraedro $ABCD$ e pertencente ao plano (M, N, Q):
$V_{P(AMN)} + V_{P(AMQ)} + V_{P(ANQ)} =$
$= V_{AMNQ}$ (1)
ou seja:



$$\frac{1}{3} \cdot \frac{(AM)(AN)}{2} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot \frac{(AM)(AQ)}{2} \cdot b + \frac{1}{3} \cdot \frac{(AM)(AQ)}{2} \cdot c =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(AM)(AQ)}{2} \cdot (AM). \quad (2)$$

Daí vem:
$(AM)(AN) \cdot a + (AM)(AQ) \cdot b + (AN)(AQ) \cdot c = (AM) \cdot (AN) \cdot (AQ)$
que, dividindo por $(AM) \cdot (AN) \cdot (AQ)$, nos dá:

$$\frac{a}{AQ} + \frac{b}{AN} + \frac{c}{AM} = 1. \quad (3)$$

Reciprocamente, se AM, AN e AQ satisfazem a relação (3), então P pertence ao plano (M, N, P).
Notemos que de (3) obtemos (2) e depois (1).
Sendo P interior ao triedro, temos:
$V_{P(AMN)} + V_{P(AMQ)} + V_{P(ANQ)} + V_{P(MNQ)} = V_{AMNQ}$. (4)
De (4) e (1) vem que $V_{P(MNQ)} = 0$, ou seja, P está no plano de M, N e Q.

b) Temos:

$$V_{AMNQ} = \frac{1}{6} \cdot (AM)(AN)(AQ) = \frac{abc}{6} \cdot \frac{(AM)}{c} \cdot \frac{(AN)}{b} \cdot \frac{(AQ)}{a}$$

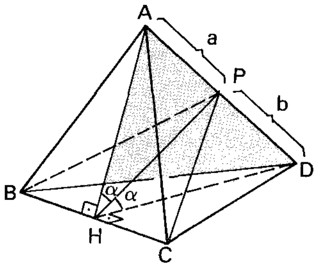
Esse volume é mínimo quando o produto $\frac{c}{AM} \cdot \frac{b}{AN} \cdot \frac{a}{AQ}$ é máximo. Mas este produto é máximo quando os fatores são iguais, isto é:

$$\frac{a}{AQ} = \frac{b}{AN} = \frac{c}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow (AQ = 3a, AN = 3b, AM = 3c)$$

480. Seja P a interseção do plano bissetor do diedro formado pelas faces ABC e BCD com a aresta AD.
Considere o triângulo AHD.
Aplicando o teorema da bissetriz interna nesse triângulo, temos:

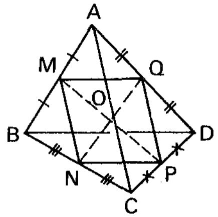
$$\frac{AH}{DH} = \frac{a}{b}.$$

Então:



$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{BC \cdot AH}{2}}{\frac{BC \cdot DH}{2}} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AH}{DH} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{a}{b}.$$

481. Primeiramente devemos provar que os segmentos que unem os pontos médios de arestas opostas de um tetraedro concorrem num mesmo ponto.
Sejam MP, NQ e RS os segmentos citados acima. Temos:

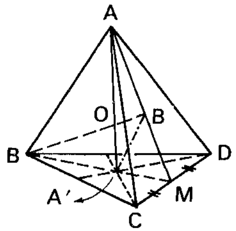


$$\left.\begin{array}{l} \overline{MQ} \parallel \overline{BD} \\ \overline{NP} \parallel \overline{BD} \\ MQ = NP = \frac{BD}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ MNPQ é paralelogramo $\Rightarrow \overline{MP} \cap \overline{NQ} = \{O\}$. Analogamente, $\overline{RS} \cap \overline{MP} = \{O\}$. Então, $\overline{MP} \cap \overline{NQ} \cap \overline{RS} = \{O\}$.

A reta AO situada no plano (A, B, M) encontra a mediana $\overline{BM}$ do ΔBCD e, conseqüentemente, o baricentro A' desse triângulo.

Deve-se provar que $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{3}$.



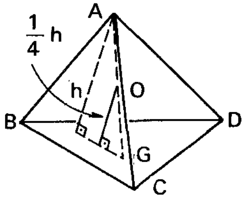
Unindo os pontos B e O e procedendo de modo análogo ao que fizemos para a face BCD, temos que BO intercepta o ΔACD em B', baricentro do ΔACD.

Daí: $\frac{MA'}{MB} = \frac{1}{3} = \frac{MB'}{MB} \Rightarrow A'B' \parallel AB \Rightarrow \Delta OA'B' \sim \Delta OAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{3}$.

482. Sejam o tetraedro $ABCD$ e um ponto O de seu interior tal que os tetraedros $OABC$, $OABD$, $OACD$ e $OBCD$ sejam equivalentes.

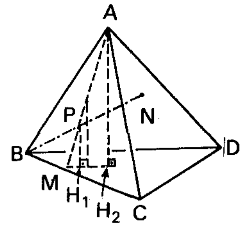
O volume de cada um dos 4 tetraedros é então $\frac{1}{4}$ do volume de $ABCD$.



Então a distância do ponto O a uma face é $\frac{1}{4}$ da altura de $ABCD$ em relação a essa face.
Usando o resultado do problema anterior, podemos concluir que O é o ponto pertencente aos 4 segmentos com uma extremidade num vértice e a outra no baricentro da face oposta e, ainda, que o ponto O divide cada um desses segmentos na razão de 3 para 1 a partir do vértice.

Na figura: $\frac{OA}{OG} = \frac{3}{1}$, $OA = \frac{3}{4}(AG)$, $OG = \frac{1}{4}(AG)$.

483. Considerando a figura ao lado, temos:



$$\frac{V_{PBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{BCD} \cdot PH_1}{S_{BCD} \cdot AH_2} = \frac{PH_1}{AH_2}.$$

$\Delta PMH_1 \sim \Delta AMH_2 \Rightarrow$

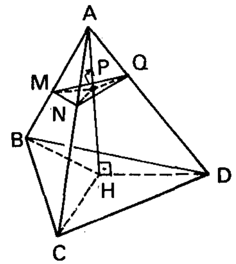
$$\Rightarrow \frac{PH_1}{AH_2} = \frac{PM}{AM} \quad (1)$$

Analogamente, $\frac{V_{PACD}}{V_{ABCD}} = \frac{PN}{BN}$ (2), $\frac{V_{PABD}}{V_{ABCD}} = \frac{PR}{CR}$ (3), $\frac{V_{PABC}}{V_{ABCD}} = \frac{PQ}{DQ}$. (4)

$$(1) + (2) + (3) + (4) \Rightarrow \frac{PM}{AM} + \frac{PN}{BN} + \frac{PR}{CR} + \frac{PQ}{DQ} = 1$$

484. Resolvido.

485. Sejam:
V: o volume da pirâmide triangular regular ABCD;
$AP = h_1$, $AH = h_2$;
$AB = AC = AD = a$.



Note que

$$V_{ABCH} = V_{ACDH} = V_{ABDH} = \frac{V}{3}.$$

Temos:

$$\frac{V_{APMN}}{V_{AHBC}} = \frac{AP \cdot AM \cdot AN}{AH \cdot AB \cdot AC} \Rightarrow \frac{V_{APMN}}{\frac{V}{3}} = \frac{h_1 \cdot AM \cdot AN}{h_2 \cdot a^2}. \quad (1)$$

Analogamente, $\dfrac{V_{APNQ}}{\frac{V}{3}} = \dfrac{h_1 \cdot AN \cdot AQ}{h_2 \cdot a^2}$ (2) e $\dfrac{V_{APMQ}}{\frac{V}{3}} = \dfrac{h_1 \cdot AM \cdot AQ}{h_2 \cdot a^2}$. (3)

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 3 \cdot \frac{V_{AMNQ}}{V} = \frac{h_1}{h_2 \cdot a^2}(AM \cdot AN + AN \cdot AQ + AM \cdot AQ)$$

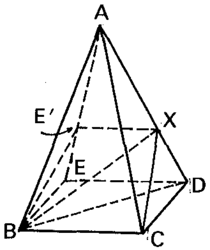
Usando o resultado do exercício anterior (*484*), temos:

$$3 \cdot \frac{AM \cdot AN \cdot AQ}{a^3} = \frac{h_1}{h_2 \cdot a^2}(AM \cdot AN + AN \cdot AQ + AM \cdot AQ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3h_2}{ah_1}(AM \cdot AN \cdot AQ) = AM \cdot AN + AN \cdot AQ + AM \cdot AQ\,(\div\, AM \cdot AN \cdot AQ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3h_1}{ah_1} = \frac{1}{AQ} + \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$$

486. Seja a pirâmide *ABCDE* cuja base *BCDE* é um paralelogramo. Façamos uma secção por um plano que contém *AB*. Obtemos o trapézio *BCXE'* e traçamos as diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{BX}$.
Temos:



$$\frac{V_{ABCX}}{V_{ABCD}} = \frac{AX}{AD} \ (1) \quad e \quad \frac{V_{ABXE'}}{V_{ABDE}} = \frac{AX \cdot AE'}{AD \cdot AE} = \frac{(AX)^2}{(AD)^2}. \ (2)$$

Fazendo (1) + (2), obtemos: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_{ABCX}}{V_{ABCD}} + \dfrac{V_{ABXE'}}{V_{ABDE}} = \dfrac{AX}{AD} + \dfrac{(AX)^2}{(AD)^2} \\ V_{ABCD} = V_{ABDE} \text{ (mesma base e altura)} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{V_{ABCXE'}}{V_{ABCD}} = \frac{AX}{AD} + \frac{(AX)^2}{(AD)^2} \Rightarrow \frac{AX}{AD} + \frac{(AX)^2}{(AD)^2} = 1$$

Fazendo $\dfrac{AX}{AD} = t$, obtemos:

$$t + t^2 = 1 \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

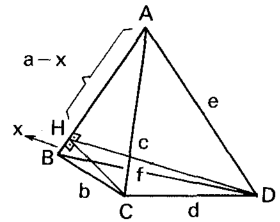
Logo, $X \in \overline{AD}$ e é tal que $\dfrac{AX}{AD} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

487. a) Seja o tetraedro *ABCD* de arestas opostas ortogonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Sejam *x*, *y* e *z* as distâncias entre as arestas opostas.
Pelo exercício *475*, o volume de um tetraedro é igual à sexta parte do produto de duas arestas opostas pela distância entre elas e pelo seno do ângulo formado. Assim,

$$V = \frac{1}{6} \cdot (AB) \cdot (CD) \cdot x = \frac{1}{6} \cdot (AC) \cdot (BD) \cdot y = \frac{1}{6} \cdot (AD) \cdot (BC) \cdot z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(AB) \cdot (CD)}{\frac{1}{x}} = \frac{(AC) \cdot (BD)}{\frac{1}{y}} = \frac{(AD) \cdot (BC)}{\frac{1}{z}}.$$

b) 1) Sejam *a* e *d*, *b* e *e*, *c* e *f* os pares de arestas opostas.
A altura da face *ABC* em relação a $\overline{AB}$ e a altura da face *ABD* em relação a $\overline{AB}$ passam pelo mesmo ponto $H \in \overline{AB}$.
Então:

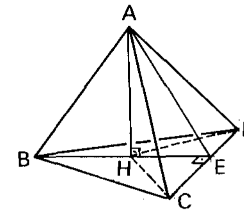


$\left.\begin{array}{l} \Delta BCH\text{: } (HC)^2 = b^2 - x^2 \\ \Delta ACH\text{: } (HC)^2 = c^2 - (a - x)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 - c^2 = x^2 - (a - x)^2 \ (1)$

$\left.\begin{array}{l} \Delta ADH\text{: } (HD)^2 = e^2 - (a - x)^2 \\ \Delta BDH\text{: } (HD)^2 = f^2 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f^2 - e^2 = x^2 - (a - x)^2 \ (2)$

(1) e (2) $\Rightarrow b^2 - c^2 = f^2 - e^2 \Rightarrow b^2 + e^2 = c^2 + f^2$
Analogamente, $a^2 + d^2 = b^2 + e^2$.

2) Seja *ABE* a secção pelo plano que passa por $\overline{AB}$ e é perpendicular a $\overline{CD}$.
A altura *AH* do ΔABE é altura do tetraedro e *H* é o ortocentro do ΔBCD.



H pertence ao interior do $\Delta BCD \Rightarrow (AB)^2 = (BE)^2 + (AE)^2 - 2(BE)(HE) \Rightarrow$
$\Rightarrow (AB)^2 \cdot (CD)^2 = (BE)^2 \cdot (CD)^2 - 2(BE)(CD) \cdot (HE)(CD) \Rightarrow$
$\Rightarrow (AB)^2 \cdot (CD)^2 = 4[(S_{BCD})^2 + (S_{ACD})^2 - 2(S_{BCD})(S_{HCD})]$ (1)
Analogamente:
$(AC)^2 \cdot (BD)^2 = 4[(S_{BCD})^2 + (S_{ABD})^2 - 2(S_{BCD})(S_{HBD})]$ (2)
$(AD)^2 \cdot (BC)^2 = 4[(S_{BCD})^2 + (S_{ABC})^2 - 2(S_{BCD})(S_{HBC})]$ (3)
Notando que $S_{HBC} + S_{HBD} + S_{HCD} = S_{BCD}$ e somando (1), (2) e (3), vem:
$(AB)^2 \cdot (CD)^2 + (AC)^2 \cdot (BD)^2 + (AD)^2 \cdot (BC)^2 =$
$= 4[(S_{ABC})^2 + (S_{ABD})^2 + (S_{ACD})^2 + (S_{BCD})^2]$

c) O ângulo $A\hat{E}B$ é secção reta do diedro de origem $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ são projeções de $\overleftrightarrow{AB}$ sobre *ACD* e *BCD*; $A\hat{B}E$ e $B\hat{A}E$ são os ângulos do diedro de origem $\overleftrightarrow{AB}$ e das faces *BCD* e *ACD*. Sendo estes três ângulos do ΔABE, eles têm a soma igual a dois retos. Considerando as demais arestas diferentes de $\overline{AB}$, temos que a soma dos seis diedros e dos doze ângulos, formados por cada aresta com as duas faces por ela cortadas, é igual a doze ângulos retos.

489. Sejam:

V: volume do prisma;

P: soma dos volumes das pirâmides que têm por vértice O e por bases, as faces laterais do prisma;

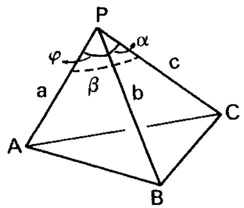
V_1: volume da pirâmide que tem, por vértice, O e, por base, a base do prisma que não contém O.

Temos:

$$V = P + V_1 \Rightarrow V = P + \frac{V}{3} \Rightarrow P = \frac{2}{3} \cdot V.$$

490. $\dfrac{ab \operatorname{sen} \varphi}{2} + \dfrac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2} + \dfrac{ac \operatorname{sen} \beta}{2} = 3d^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ab \operatorname{sen} \varphi + bc \operatorname{sen} \alpha + ac \operatorname{sen} \beta = 6d^2$



Seja V o volume do tetraedro cujo vértice coincide com P e cujas arestas unitárias estão contidas em $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$, respectivamente. Então:

$$\frac{V_{PABC}}{V} = abc \Rightarrow V_{PABC} = V \cdot a \cdot b \cdot c.$$

V_{PABC} é máximo $\Rightarrow a \cdot b \cdot c$ é máximo $\Rightarrow a^2b^2c^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varphi$ é máximo $\Rightarrow$

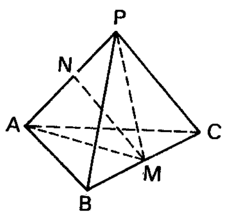
$\Rightarrow (ab \operatorname{sen} \varphi)(bc \operatorname{sen} \alpha)(ac \operatorname{sen} \beta)$ é máximo

$$\left.\begin{array}{l} ab \operatorname{sen} \varphi > 0,\ bc \operatorname{sen} \alpha > 0,\ ac \operatorname{sen} \beta > 0 \\ ab \operatorname{sen} \varphi + bc \operatorname{sen} \alpha + ac \operatorname{sen} \beta = \text{cte.} \\ (ab \operatorname{sen} \varphi)(bc \operatorname{sen} \alpha)(ac \operatorname{sen} \beta) \text{ é máximo} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow ab \operatorname{sen} \varphi = bc \operatorname{sen} \alpha = ac \operatorname{sen} \beta = 2d^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(a = d\sqrt{\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varphi}},\ b = d\sqrt{\frac{2 \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi}},\ c = d\sqrt{\frac{2 \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}}\right)$$

491. a) Seja o tetraedro $PABC$ que tem $\overline{PA}$ e $\overline{BC}$, $\overline{PB}$ e $\overline{AC}$, $\overline{PC}$ e $\overline{AB}$ como arestas opostas e sejam $\overline{AM}$, $\overline{MP}$ e $\overline{MN}$ os segmentos que unem os pontos médios de tais arestas.



Aplicando a relação de Stewart aos triângulos ABC, PBC e PAM, temos:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = 2(AM)^2 + \frac{(BC)^2}{2} \quad (1)$$

$$(PB)^2 + (PC)^2 = 2(PM)^2 + \frac{(BC)^2}{2} \quad (2)$$

$$(AM)^2 + (PM)^2 = 2(MN)^2 + \frac{(AP)^2}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2(AM)^2 + 2(PM)^2 = 4(MN)^2 + (AP)^2 \quad (3)$

Fazendo (1) + (2) e entrando com (3), temos:

$(AB)^2 + (PC)^2 + (AC)^2 + (PB)^2 = (BC)^2 + (AP)^2 + 4(MN)^2$

b) De acordo com o item a, podemos escrever:

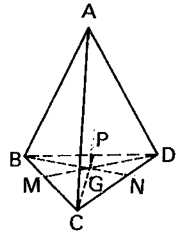
$(AB)^2 + (PC)^2 + (AC)^2 + (PB)^2 = (BC)^2 + (AP)^2 + 4(MN)^2 \quad (1)$

$(AC)^2 + (PB)^2 + (BC)^2 + (AP)^2 = (AB)^2 + (PC)^2 + 4(RS)^2 \quad (2)$

$(BC)^2 + (AP)^2 + (AB)^2 + (PC)^2 = (AC)^2 + (PB)^2 + 4(TU)^2 \quad (3)$

$((1) + (2) + (3)) \Rightarrow (AB)^2 + (BC)^2 + (AC)^2 + (AP)^2 + (BP)^2 + (CP)^2 =$
$= 4[(MN)^2 + (RS)^2 + (TU)^2]$

492. Seja um tetraedro $ABCD$, no qual as faces ABC, ACD e ADB são equivalentes.



O plano bissetor do diedro de origem $\overline{AB}$ intercepta $\overline{CD}$ em N. Daí, aplicando a propriedade vista no exercício *480*, temos:

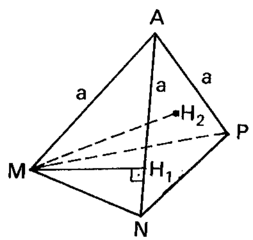
$$\frac{CN}{S_{ABC}} = \frac{DN}{S_{ABD}} \Rightarrow CN = DN \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ BN é mediana do ΔBCD.

Procedendo de modo análogo, concluímos que, se G é baricentro do ΔBCD, então os planos bissetores de origem $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ se interceptam segundo $\overline{AG}$. Como toda reta do plano bissetor de um diedro se inclina igualmente sobre as faces, temos que $\overline{AG}$ se inclina igualmente sobre ABC, ACD e ADB.

Reciprocamente, sendo G o baricentro do ΔBCD, suponhamos $\overline{AG}$ igualmente inclinada sobre ABC, ACD e ADB. Assim, $\overline{AG}$ é interseção dos planos bissetores dos diedros de origem $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$; os planos que passam por essas arestas e pelo ponto G dividem a aresta oposta em segmentos congruentes. Portanto, pelo visto no exercício *480*, as faces ABC, ACD e ADB são equivalentes.

493. a) Seja $\overline{MH_1} \perp \overline{AN}$.



$S_{AMN} \dfrac{a \cdot MH_1}{2}$, em que $MH_1 \leqslant a$

S_{AMN} é máxima se $MH_1 = AN$, ou seja, $\overline{MH_1} \perp \overline{AN}$.

Logo, o triedro deve ser tri-retangular.

b) Seja MH_2 perpendicular à face ANP.

$$V_{AMNP} = \frac{S_{AMN} \cdot MH_2}{3} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{6} \cdot a \cdot MH_1 \cdot MH_2$$

Temos: $MH_1 \leqslant a$, $MH_2 \leqslant a$.

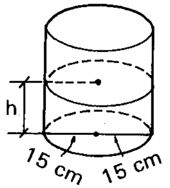
V_{AMNP} é máximo se $MH_1 = a$ e $MH_2 = a \xrightarrow{\text{item } a}$ o triedro deve ser tri-retangular.

Capítulo X – Cilindro

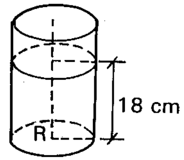
516. Sejam:

r, h, V_p: raio, altura e volume do pluviômetro;

R, H, V: raio, altura e volume do recipiente.



pluviômetro



recipiente

Temos:

$2\pi R = 20\pi$ cm $\Rightarrow$ R = 10 cm.

$V = \pi R^2 H \Rightarrow V = \pi \cdot 10^2 \cdot 18 \Rightarrow V = 1800\pi$ cm³

$V_p = V \Rightarrow \pi \cdot r^2 \cdot h = 1\,800\pi \Rightarrow 15^2 \cdot h = 1\,800 \Rightarrow h = 8$ cm

552. $A_t = 2\pi r(r + g)$

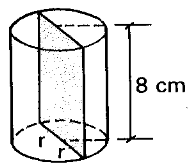
Seja R o raio do novo cilindro. Devemos ter:

$$2\pi Rg = 2\pi r(r+g) \Rightarrow R = r + \frac{r^2}{g}.$$

Logo, o aumento deve ser de $\dfrac{r^2}{g}$.

556. h = 8 cm

$B = 20\pi \Rightarrow \pi r^2 = 20\pi \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$ cm



$$A_t = \frac{B}{2} + \frac{B}{2} + \frac{1}{2}A_\ell + A_{secção} \Rightarrow$$

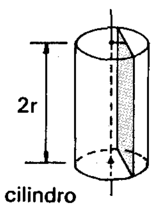
$$\Rightarrow A_t = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2\pi rh + 2r \cdot h$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{\pi \cdot 20}{2} + \frac{\pi \cdot 20}{2} + \pi \cdot 2\sqrt{5} \cdot 8 + 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 8 \Rightarrow$$

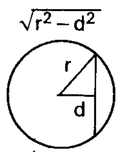
$$\Rightarrow A_t = [32\sqrt{5} + (5 + 4\sqrt{5})\,4\pi]\ \text{cm}^2$$

576. $A_{secção} = B \Rightarrow 2r(2\sqrt{r^2 - d^2}) = \pi r^2 \Rightarrow 4\sqrt{r^2 - d^2} = \pi r \Rightarrow$

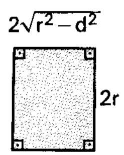
$$\Rightarrow r^2 - d^2 = \frac{\pi^2 r^2}{16} \Rightarrow d = \frac{r\sqrt{16 - \pi^2}}{4}$$



cilindro



base



secção

578. $A_t = 2\pi a^2 \Rightarrow 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi a^2 \Rightarrow r^2 + rh = a^2$ (1)

V é máximo $\Leftrightarrow$ r^2h é máximo $\Leftrightarrow$ o quadrado de r^2h é máximo $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (r^2h)^2 = (r^2)\cdot(rh)^2$ é máximo.

Em vista de (1), $r^2 + rh$ é constante.

Usando o fato de que: sendo $x + y$ constante, então $x^p \cdot y^q$ é máximo se, e somente se, $\dfrac{x}{p} = \dfrac{y}{q}$, temos:

$$(r^2)\cdot(rh)^2 \text{ é máximo } \Rightarrow \frac{r^2}{1} = \frac{rh}{2} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow \left(r = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)$$

579. $B + A_\ell = 2\pi a^2 \Rightarrow \pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi a^2 \Rightarrow r^2 + 2rh = 2a^2$ (1)

V é máximo $\Leftrightarrow$ r^2h é máximo $\Leftrightarrow$ $2r^2h$ é máximo $\Leftrightarrow$ $[2r^2h]^2$ é máximo $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (r^2)\cdot(2rh)^2$ é máximo

(1) $\Rightarrow$ $r^2 + 2rh$ é constante, daí, usando a propriedade citada no exercício anterior, vem:

$$(r^2)(2rh)^2 \text{ é máximo } \Leftrightarrow \frac{r^2}{1} = \frac{2rh^2}{2} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow \left(r = h = \frac{a\sqrt{6}}{3}\right).$$

580. $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$V = \pi r^2 \cdot h = k$, k constante (1)

A soma $r^2 + rh$ é mínima quando

$$\frac{r^2}{1} = \frac{rh}{2} \Rightarrow h = 2r \quad (2)$$

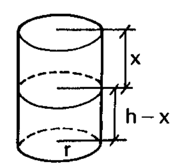
$$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow \left(r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\ h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$$

581. $\begin{cases} A_t = 2\pi S \\ A_\ell = 2\pi A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi S \\ 2\pi rh = 2\pi A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 + rh = S \\ rh = A \end{cases} \Rightarrow$

$$\left(r^2 = S - A,\ h = \frac{A}{\sqrt{S - A}}\right)$$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi(S - A)\cdot\frac{A}{\sqrt{S-A}} \Rightarrow V = \pi A\sqrt{S - A}$$

582. $B = \sqrt{A_{\ell_1} \cdot A_{\ell_2}} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \pi r^2 = \sqrt{2\pi rx \cdot 2\pi r(h - x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4hx + r^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - r^2}}{2},\ h \geq r$$

584. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2RH}{R+H} = 4 \Rightarrow RH = 2(R+H) \text{ (1)} \\ A_t = 54\pi \Rightarrow 2\pi R(R+H) = 54\pi \text{ (2)}\end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi R\left(\dfrac{RH}{2}\right) = 54\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi R^2H = 54\pi \rightarrow V = 54\pi$

$\pi R^2H = 54\pi \Rightarrow R^2H = 54 \Rightarrow H = \dfrac{54}{R^2}$ (3)

(3) em (1) $\Rightarrow R^3 - 27R + 54 = 0 \Rightarrow (R-3)^2(R+6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (R = 3, H = 6)$

$B = \pi R^2 \Rightarrow B = 9\pi;\ A_\ell = 2\pi RH \Rightarrow A_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow A_\ell = 36\pi$

585. a) A lata de maior superfície gasta mais material para ser montada. Assim, sejam S_A e S_B as superfícies das latas A e B, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l}S_A = 2\pi(2R)h + 2\pi(2R)^2 = 4\pi Rh + 8\pi R^2 \\ S_B = 2\pi R(2h) + 2\pi R^2 = 4\pi Rh + 2\pi R^2\end{array}\right\} \Rightarrow S_A > S_B,$$

gasta mais material a embalagem A.

b) Sejam V_A e V_B os volumes das embalagens A e B, respectivamente. Assim,

$$\left.\begin{array}{l}V_A = \pi \cdot (2R)^2 \cdot h = 4\pi R^2h \\ V_B = \pi R^2 \cdot (2h) = 2\pi R^2h\end{array}\right\} \Rightarrow V_A = 2V_B$$

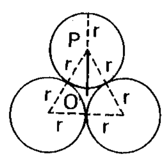
O preço do produto na embalagem A é CR$ 780,00 menor do que o dobro do preço na embalagem B; portanto, a embalagem A é mais econômica para o consumidor.

586. OP é $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero de lado $2r$. Então:

$OP = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{(2r)\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Sendo $R = OP + r$, vem:

$R = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3} + r = r\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)$.



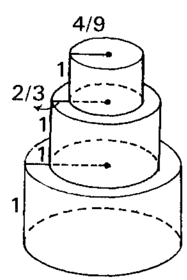
587. Os volumes dos cilindros são, a partir do maior:

$\pi(1)^2 \cdot 1;\ \pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot 1;\ \pi\left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot 1; \ldots$

A soma dos volumes é:

$S = \pi + \dfrac{4}{9}\pi + \dfrac{16}{81}\pi + \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \pi\left(1 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{16}{81} + \ldots\right)$



A série entre parênteses converge para $\dfrac{1}{1 - \frac{4}{9}}$, que é o limite da soma dos termos da P.G. $\left(1, \dfrac{4}{9}, \dfrac{16}{81}, \ldots\right)$.

Logo:

$S = \pi\left(\dfrac{1}{1 - \frac{4}{9}}\right) \Rightarrow S = \dfrac{9\pi}{5}$.

Resposta: O volume do sólido é $\dfrac{9\pi}{5}$.

588. O volume de um cilindro de raio R e altura H é $V = \pi R^2H$.

Do gráfico:

a) Para $x = 2$, temos $V = 18\pi$.
$\pi R^2 \cdot 2 = 18\pi \Rightarrow R = 3$.

b) Para $x = 6$, temos $V = 44\pi$.
$\pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \pi \cdot r^2 \cdot (6 - 4) = 44\pi \Rightarrow r = 2$

Resposta: $R = 3$ *cm* e $r = 2$ *cm*.

589. Cálculo do raio da base do cilindro:

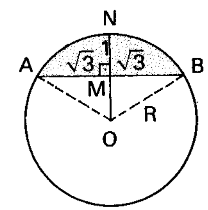
Triângulo retângulo OMB:

$R^2 = (R-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow R = 2$.

Cálculo da área S do segmento circular de arco ANB:

triângulo OMB: sen $B\hat{O}M = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow B\hat{O}M = 60° \Rightarrow A\hat{O}B = 120°$.



A área S do segmento circular é:

$S = S_{\text{setor (AOB)}} - S_{\text{triângulo (AOB)}} = \dfrac{\pi 2^2}{3} - \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 120° = \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

O volume do sólido da figura é:

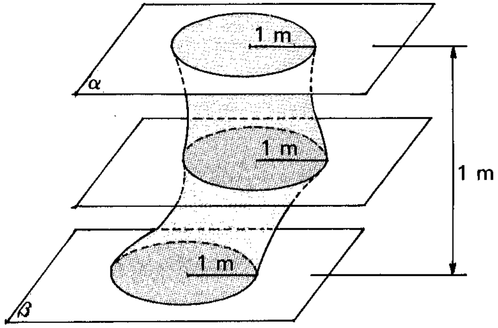
$V = S \cdot h \Rightarrow V = \left(\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \cdot 10 \Rightarrow V = \dfrac{10}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})\ \text{cm}^3$

590. a) Não. b) π m³

a) De acordo com o enunciado, podemos afirmar que o sólido S assim descrito apresenta como secções paralelas aos planos α e β círculos congruentes de raios *1 m*. De acordo com o princípio de Cavalieri, tal sólido é equivalente a um cilindro, cuja base é um círculo de raio *1 m* e a altura é de *1 m*. O sólido da figura acima satisfaz o enunciado e não é um cilindro.

b) De acordo com o exposto no item *a*, o volume *V*, em metros cúbicos, desse sólido é dado por

$$V_S = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 \Rightarrow V = \ \cdot \pi$$



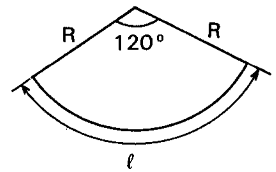
Capítulo XI – Cone

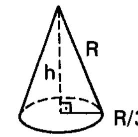
629. $A_\ell = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi R^2 \Rightarrow A_\ell = \dfrac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot R^2 \Rightarrow A_\ell = \dfrac{\pi R^2}{3}$

$$A_\ell = \frac{\ell \cdot R}{2} \Rightarrow \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\ell \cdot R}{2} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3}\pi R$$

Seja *r* o raio da base do cone. Temos:

$$2\pi r = \ell \Rightarrow 2\pi r = \frac{2}{3}\pi R \Rightarrow r = \frac{R}{3}$$





$$B = \pi r^2 \Rightarrow B = \pi \cdot \frac{R^2}{9}$$

$$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = \frac{\pi R^2}{3} + \frac{\pi R^2}{9} \Rightarrow A_t = \frac{4}{9}\pi R^2$$

$$h^2 = R^2 - \frac{R^2}{9} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \quad h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2}{9} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} R \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{2}}{81} \pi R^3$$

636. $\dfrac{A_\ell}{B} = \dfrac{7}{5}$; $h = 4\sqrt{6}$ cm

$$\frac{A_\ell}{B} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{\pi r g}{\pi r^2} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{g}{r} = \frac{7}{5} \Rightarrow g = \frac{7}{5} r \ (1)$$

$$h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow (4\sqrt{6})^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow g^2 - r^2 = 96 \ (2)$$

$$(1) \text{ em } (2) \Rightarrow \left(\frac{7}{5} r\right)^2 - r^2 = 96 \Rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

$$g = \frac{7}{5} r \Rightarrow g = \frac{7}{5} \cdot 10 \Rightarrow g = 14 \text{ cm}$$

640. $A_\ell = A$; $g = \dfrac{4}{5} \cdot 2r \Rightarrow g = \dfrac{8r}{5}$

$$\pi r g = A \Rightarrow \pi r \frac{8}{5} r = A \Rightarrow r^2 = \frac{5A}{8\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{5A}{8\pi}}$$

$$B = \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{5}{8} A$$

$$g = \frac{8}{5} r \Rightarrow g = \frac{8}{5}\sqrt{\frac{5A}{8\pi}}$$

$$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 + \frac{5A}{8\pi} = \frac{64}{25} \cdot \frac{5A}{8\pi} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{39A}{40\pi}}$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5A}{8} \cdot \sqrt{\frac{39A}{40\pi}} \Rightarrow V = \frac{5A}{48} \cdot \frac{\sqrt{39A} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{10\pi} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{5A}{48} \cdot \frac{\sqrt{195A}}{5 \cdot \sqrt{2\pi}} \Rightarrow V = \frac{A}{48}\sqrt{\frac{195A}{2\pi}}$$

643. Sejam $h - a$, h e $h + a$ o raio da base, a altura e a geratriz do cone. Temos:

$(h + a)^2 = h^2 + (h - a)^2 \Rightarrow h = 4a$ (1)

$V = 144\pi \Rightarrow \dfrac{\pi(h - a)^2 \cdot h}{3} = 144\pi \Rightarrow (h - a)^2 \cdot h = 432$ (2)

(1) em (2) $\Rightarrow \left(h - \dfrac{h}{4}\right)^2 \cdot h = 432 \Rightarrow h = 4\sqrt[3]{12}$

Substituindo em (1): $4\sqrt[3]{12} = 4a \Rightarrow a = \sqrt[3]{12}$

$r = h - a \Rightarrow r = 4\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{12} \Rightarrow r = 3\sqrt[3]{12}$

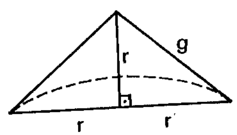
$g = h + a \Rightarrow g = 4\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{12} \Rightarrow g = 5\sqrt[3]{12}$

645. $g^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow g = r\sqrt{2}$

$V = 576\pi \Rightarrow \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\right) = 576\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 12\sqrt[3]{2}$ cm

$A_\ell = \dfrac{2r \cdot r}{2} + \dfrac{\pi r g}{2} \Rightarrow$



$\Rightarrow A_\ell = (12\sqrt[3]{2})^2 + \dfrac{\pi \cdot 12\sqrt[3]{2} \cdot 12\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 72\sqrt[3]{4}\,(2 + \pi\sqrt{2})$ cm^2

646. $\text{sen } 60° = \dfrac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{R} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2R} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 7$ cm

$h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h^2 = 25^2 - 7^2 \Rightarrow$

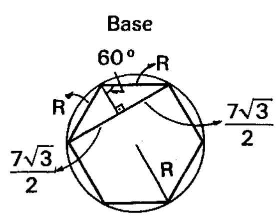
$\Rightarrow h = 24$ cm

$B = \pi R^2 \Rightarrow B = \pi \cdot 7^2 \Rightarrow B = 49\pi$ cm^2

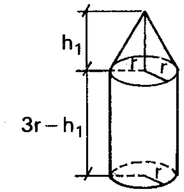
$A_\ell = \pi R g \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot 7 \cdot 25 = A_\ell = 175\pi$ cm^2

$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 175\pi + 49\pi \Rightarrow A_t = 224\pi$ cm^2

$V = \dfrac{1}{3} Bh \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 49\pi \cdot 24 \Rightarrow V = 392\pi$ cm^3



650. Considerando as medidas indicadas na figura, temos:



$2\pi r(3r - h_1) + \pi r\sqrt{h_1^2 + r^2} = 5\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{h_1^2 + r^2} = 2h_1 - r \Rightarrow$

$\Rightarrow 3h_1^2 - 4h_1 r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(h_1 = 0 \text{ (não convém) ou } h_1 = \dfrac{4}{3} r\right)$

$V = \pi r^2(3r - h_1) + \dfrac{\pi r^2 h_1}{3} \Rightarrow V = \pi r^2\left(3r - \dfrac{4}{3} r\right) + \dfrac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi r \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{19}{9} \cdot \pi r^3$

652. $A_t = \pi \Rightarrow \pi r g + \pi r^2 = \pi \Rightarrow rg + r^2 = 1$ (1)

$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2}$ (2)

(2) em (1) $\Rightarrow \sqrt{g^2 - h^2} \cdot g + g^2 - h^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2g^2 + h^2g^2 - (2h^2 + h^4 + 1) = 0 \Rightarrow g = \dfrac{1 + h^2}{\sqrt{2 + h^2}}$

$r = \sqrt{g^2 - h^2} \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{(1 + h^2)^2}{(\sqrt{2 + h^2})^2} - h^2} \Rightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt{2 + h^2}}$

654. $A_t = S \Rightarrow \pi r^2 + \pi r g = S \Rightarrow r^2 + rg = \dfrac{S}{\pi}$ (1)

$g = \sqrt{h^2 + r^2}$ (2)

(2) em (1) $\Rightarrow r^2 + r\sqrt{h^2 + r^2} = \dfrac{S}{\pi} \Rightarrow r^2 = \dfrac{S^2}{\pi(\pi h^2 + 2S)}$

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \dfrac{\pi \cdot S^2 \cdot h}{\pi(\pi h^2 + 2S)} \Rightarrow V = \dfrac{hS^2}{3(\pi h^2 + 2S)}$

655. $A_\ell = A \qquad A_t = S$

$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t - A_\ell = B \Rightarrow S - A = B \Rightarrow S - A = \pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \dfrac{S - A}{\pi}$

$\pi r g = A \Rightarrow g = \dfrac{A}{\pi r} \Rightarrow g = \dfrac{A}{\pi\sqrt{\dfrac{S - A}{\pi}}}$

$h = \sqrt{g^2 - r^2} \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{A^2}{\pi\left(\dfrac{S - A}{\pi}\right)} - \dfrac{(S - A)}{\pi}} \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{A^2 - (S - A)^2}{\pi(S - A)}}$

Substituindo $r^2 + h$ na expressão do volume:

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}(S - A)\sqrt{\dfrac{A^2 - (S - A)^2}{\pi(S - A)}}$

656. $A_t = S \Rightarrow \pi r^2 = \pi r g = S \Rightarrow r^2 + rg = \dfrac{S}{\pi}$ (1)

$g = \sqrt{h^2 + r^2}$ (2)

(2) em (1) $\Rightarrow r^2 + r\sqrt{h^2 + r^2} = \dfrac{S}{\pi} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{S^2 - 2\pi Sr}}{\pi r}$

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot \dfrac{\sqrt{S^2 - 2\pi Sr}}{\pi r} \Rightarrow V = \dfrac{r}{3} \cdot \sqrt{s^2 - 2\pi Sr^2}$

659. Sejam $h - a$, h, $h + a$ o raio da base, a altura e a geratriz do cone. Temos:

$(h + a)^2 = (h - a)^2 + h^2 \Rightarrow a = \dfrac{h}{4}$

$V = 37{,}68 \Rightarrow \dfrac{\pi r^2 h}{3} = 37{,}68 \Rightarrow \dfrac{\pi \cdot (h - a)^2 \cdot h}{3} = 37{,}68 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(h - \dfrac{h}{4}\right)^2 \cdot h = 37{,}68 \Rightarrow h = 4 \text{ cm} \Rightarrow a = 1 \text{ cm}$

Então: $r = h - a \Rightarrow r = 4 - 1 \Rightarrow r = 3$ cm

$g = h + a \Rightarrow g = 4 + 1 \Rightarrow g = 5$ cm

660. $V_1 = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$, $V_2 = \dfrac{\pi(r - x)^2(h + x)}{3}$, $r > 0$, $h > 0$

$V_2 = V_1 \Rightarrow (r - x)^2(h + x) = r^2h \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{r^2h} + r^2x - 2rhx - 2rx^2 + hx^2 + x^3 = \cancel{r^2h} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 + (h - 2r)x^2 + (r^2 - 2rh)x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x[x^2 + (h - 2r)x + (r^2 - 2rh)] = 0 \Rightarrow x = 0$ (solução trivial)

ou $x^2 + (h - 2r)x + (r^2 - 2rh) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x = \dfrac{2r - h + \sqrt{h^2 + 4rh}}{2} \text{ ou } x = \dfrac{2r - h - \sqrt{h^2 + 4rh}}{2}\right)$

Note que a solução $\dfrac{2r - h + \sqrt{h^2 + 4rh}}{2}$ é sempre possível, pois:

$\sqrt{h^2 + 4rh} > h \Rightarrow \sqrt{h^2 + 4rh} - h > 0 \Rightarrow 2r + \sqrt{h^2 + 4r} - h > 0$

A solução $\dfrac{2r - h - \sqrt{h^2 + 4rh}}{2}$ só será possível se tivermos:

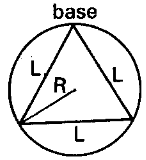
$2r - h - \sqrt{h^2 + 4rh} > 0 \Leftrightarrow 2r - h > \sqrt{h^2 + 4rh} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4r^2 - 4rh + h^2 > h^2 + 4rh \Leftrightarrow r > 2h$

Resposta: $\dfrac{2r - h + \sqrt{h^2 + 4rh}}{2}$ ou $\left(\dfrac{2r - h - \sqrt{h^2 + 4rh}}{2} \text{ com } r > 2h\right)$.

666. a) A base do tetraedro regular é inscrita na base do cone de raio *R*. Sendo *L* a aresta do tetraedro e *H* sua altura, temos:

base



$L = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \dfrac{L\sqrt{3}}{3}$

$H = \dfrac{L\sqrt{6}}{3} = H_{cone}$

$V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot H \Rightarrow V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{L\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{L\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V_{cone} = \dfrac{\pi\sqrt{6}}{27} \cdot L^3$

b) $R = \dfrac{L\sqrt{3}}{3}$; $H = \dfrac{L\sqrt{6}}{3}$ $\quad A$ = área lateral do cone

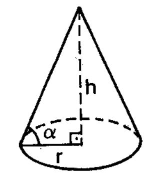
$A = 2\pi RH \Rightarrow A = 2\pi \dfrac{L\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{L\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3} L^2$

667. $\left.\begin{array}{l} r = g \cos\alpha \\ h = g \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{h}{r} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow h = r \operatorname{tg}\alpha$ (1)

$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow r^2h = \dfrac{3V}{\pi}$ (2)

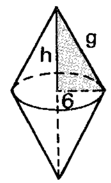
(1) em (2) $\Rightarrow r^2 \cdot r \cdot \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3V}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi \operatorname{tg}\alpha}}$

$h = r \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{\pi \operatorname{tg}\alpha}} \cdot \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{3V \operatorname{tg}^2\alpha}{\pi}}$



Capítulo XII — Esfera

698. $A_{\text{sólido}} = A_{\text{esf.}} \Rightarrow 2\pi r g = 4\pi r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\pi \cdot 6 \cdot g = 4\pi \cdot 6^2 \Rightarrow g = 12$ cm
$h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 6\sqrt{3}$ cm



$$\frac{V_{\text{sólido}}}{V_{\text{esf.}}} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^2 h}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \frac{V_{\text{sólido}}}{V_{\text{esf.}}} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 6\sqrt{3}}{\frac{4}{3}\pi\cdot 6^3} \Rightarrow \frac{V_{\text{sólido}}}{V_{\text{esf.}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

706. $1 \text{ m} = \dfrac{\frac{2\pi R}{4}}{10^7} \Rightarrow R = \dfrac{2\cdot 10^7}{\pi}$ m

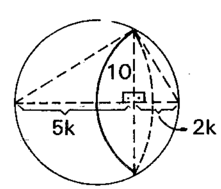
$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4\pi\left(\frac{2\cdot 10^7}{\pi}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{16\cdot 10^{14}}{\pi} \Rightarrow A = \frac{16\cdot 10^8}{\pi} \text{ km}^2$$

717. Sejam *a* e *r* a aresta do cubo e o raio da esfera.
Temos:

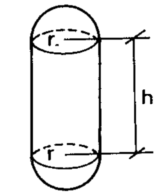
$$V_{\text{cubo}} = V_{\text{esf.}} \Rightarrow a^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow a = r\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}$$

$$\frac{A_{\text{cubo}}}{A_{\text{esf.}}} = \frac{6a^2}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{A_{\text{cubo}}}{A_{\text{esf.}}} = \frac{6\cdot\left(r\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}\right)^2}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{V_{\text{cubo}}}{A_{\text{esf.}}} = 3\sqrt[3]{\frac{2}{9\pi}}$$

719. Relações métricas $\Rightarrow 2k \cdot 5k = 10^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = \sqrt{10}$
$2R = 7k \Rightarrow R = \dfrac{7\sqrt{10}}{2}$
$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{7\sqrt{10}}{2}\right)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \dfrac{1\,715\sqrt{10}\,\pi}{3}$ cm³



724. $2r = \dfrac{3}{5}h \Rightarrow h = \dfrac{10}{3}r$ (1)
$A_t = 4\pi R^2 \Rightarrow 2\pi r h + 4\pi r^2 = 4\pi R^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow rh + 2r^2 = 2R^2$ (2)
(1) em (2) $\Rightarrow r\cdot\dfrac{10}{3}r + 2r^2 = R^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{r^2}{R^2} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow \dfrac{r^3}{R^3} = \dfrac{3\sqrt{6}}{32}$ (3)

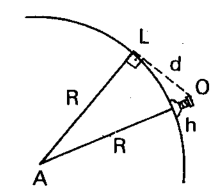


$$\frac{V_{\text{cald.}}}{V_{\text{esf.}}} = \frac{\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \frac{V_{\text{cald.}}}{V_{\text{esf.}}} = \frac{14r^3}{4R^3} \Rightarrow \frac{V_{\text{cald.}}}{V_{\text{esf.}}} = \frac{14}{4}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{6}}{32} \Rightarrow$$

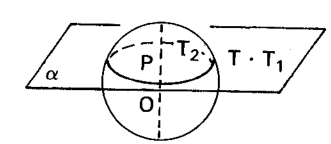
$$\Rightarrow \frac{V_{\text{cald.}}}{V_{\text{esf.}}} = \frac{21\sqrt{6}}{64}$$

742. a) O triângulo *ALO* é retângulo em *L*. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$R^2 + d^2 = (R + h)^2 \Rightarrow \cancel{R^2} + d^2 = \cancel{R^2} + 2Rh + h^2 \Rightarrow d^2 = h(2R + h)$
Usando a aproximação indicada no problema, obtemos
$d^2 = h(2R)$ ou ainda $d = \sqrt{2Rh}$.

b) Substituindo na fórmula
$R = 6\,300$ km e $h = 35$ m $= 35 \cdot 10^{-3}$ km,
encontramos: $d = \sqrt{2 \cdot 6\,300 \cdot 35 \cdot 10^{-3}}$
$d = \sqrt{63 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}$
$d = \sqrt{441} = 21$ km
Resposta: 21 km.



744. a) *P* é um ponto do diâmetro de uma esfera, distinto do centro.
α é um plano que passa por *P* e é perpendicular ao diâmetro.
Sendo *T* um ponto da superfície esférica e de α, então *TP* é constante, pois
$TP = \sqrt{(OT)^2 - (OP)^2}$ e OP e OT são constantes.



Logo, se $T \in \alpha$ e *PT* é constante, então *T* pertence a uma circunferência contida em α e de centro *P*. (1)

Se $T_1 \in \alpha$ e $PT_1 > PT$, temos que $OT_1 > OT$ e T_1 não pertence à esfera.
Se $T_2 \in \alpha$ e $PT_2 < PT$, temos que $OT_2 < OT$ e T_2 pertence à esfera. (2)
De (1) e (2) vem que a interseção da esfera pelo plano é um círculo.

b) Área do círculo máximo $= \pi r^2$

Área do círculo secção $= \dfrac{1}{2}\pi r^2$

Então: $\pi(PT)^2 = \pi \dfrac{r^2}{2} \Rightarrow (PT)^2 = \dfrac{r^2}{2}$.

A distância *OP* pedida é:

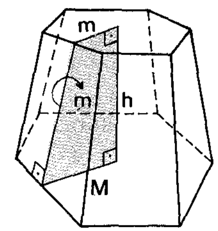
$$(OP)^2 = (OP)^2 - (PT)^2 \Rightarrow (OP)^2 = r^2 - \frac{r^2}{2} \Rightarrow OP = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

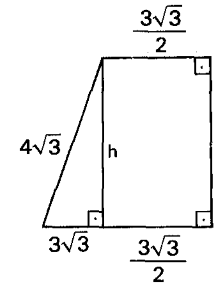
Capítulo XIII — Sólidos semelhantes — Troncos

771. $A_t = 279\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot A_{face} + B + b = 279\sqrt{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6 \cdot \left(\frac{9+3}{2}\right) \cdot m' + \frac{3}{2} \cdot \frac{9^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = 279\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m' = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$$





$$h^2 + (3\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow h = \sqrt{21}\text{ cm}$$

$$V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{21}}{3}\left[\frac{243\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{2}} + \frac{27\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{351\sqrt{7}}{2}\text{ cm}^3$$

777. $B = 54\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{3}{2}L^2\sqrt{3} = 54\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow L = 6$ m

$b = 6\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{3}{2}\ell^2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow$

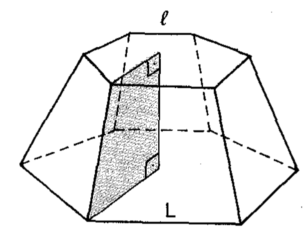
$\Rightarrow \ell = 2$ m

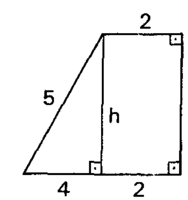
$h^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h = 3$ m

$V = \dfrac{h}{3}[B + \sqrt{Bb} + b] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{3}{3}[54\sqrt{3} + \sqrt{54\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}} + 6\sqrt{3}] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 78\sqrt{3}$ m^3





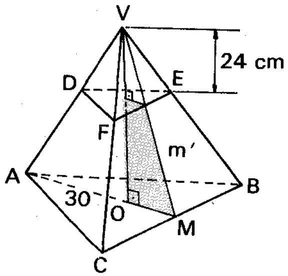
778. Note que *OA = 30 cm* e seja *AB = AC = BC = L*.

$\dfrac{L\sqrt{3}}{2} = 45 \Rightarrow L = 30\sqrt{3}$ cm.

ΔVOM: $VO^2 + OM^2 = VM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H^2 + 15^2 = 39^2 \Rightarrow H = 36$ cm

Seja $DE = DF = EF = \ell$. Por semelhança:

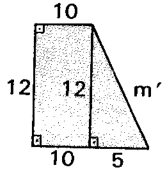


$$\frac{\ell}{L} = \frac{24}{H} \Rightarrow \frac{\ell}{30\sqrt{3}} = \frac{24}{36} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ell = 20\sqrt{3}$ cm.

$$\frac{a}{A} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 10 \text{ cm}$$

$(m')^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow m' = 13$ cm



$$B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{(30\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = 675\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{(20\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = 300\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{tronco}} = \frac{BH}{3} - \frac{bh}{3} \Rightarrow V_{\text{tronco}} = \frac{675\sqrt{3}\cdot 36}{3} - \frac{300\sqrt{3}\cdot 24}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow V_{\text{tronco}} = 5\,700\sqrt{3}$ cm³

$$A_t = B + b + 3\cdot\left(\frac{\ell + L}{2}\right)\cdot m' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = 675\sqrt{3} + 300\sqrt{3} + 3\cdot\left(\frac{30\sqrt{3} + 20\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 13 \Rightarrow A_t = 1\,950\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

780. Sejam H_1 a altura da pirâmide que se obtém com o corte, H_2 a altura da pirâmide original e V o volume do tronco assim obtido. Temos:

$$V = \frac{h}{3}[B + \sqrt{BB'} + B'] \Rightarrow \frac{BH_2}{3} - \frac{B'H_1}{3} = \frac{h}{3}[B + \sqrt{BB'} + B'] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BH_2 - B'(H_2 - h) = h[B + \sqrt{BB'} + B'] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B - B')H_2 + B'h = h[B + \sqrt{BB'} + B'] \Rightarrow$$

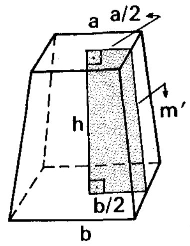
$$\Rightarrow H_2 = \frac{h[B + \sqrt{BB'}]}{B - B'} \Rightarrow H_2 = \frac{h[B + \sqrt{BB'}][B - \sqrt{BB'}]}{(B - B')(B - \sqrt{BB'})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{h[B\cancel{(B - B')}]}{\cancel{(B - B')}(B - \sqrt{BB'})} \Rightarrow H_2 = \frac{hB}{\sqrt{B}(\sqrt{B} - \sqrt{B'})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

781. De acordo com as medidas indicadas:

$$(m')^2 = h^2 + \frac{(b - a)^2}{4}$$



$A_\ell = a^2 + b^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{a + b}{2}\right)\cdot m' = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

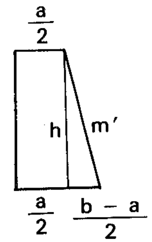
$$\Rightarrow 2(a + b)\sqrt{\frac{4h^2 + (b - a)^2}{4}} = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + b)\sqrt{4h^2 + (b - a)^2} = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4h^2 = \left[\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right]^2 - (b - a)^2$$

$$\Rightarrow 4h^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b} + b - a\right)\left(\frac{a^2 + b^2}{a + b} - b + a\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4h^2 = \frac{2b^2\cdot 2a^2}{(a + b)(a + b)} \Rightarrow h = \frac{ab}{a + b}$$



782. Seja E o erro cometido. Temos:

$$E = \left|\frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b) - \left(\frac{B + b}{2}\right)h\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \left|\frac{Bh}{3} - \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{3} - \frac{bh}{2} + \frac{\sqrt{Bb}\,h}{3}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \left|-\frac{Bh}{6} - \frac{bh}{6} + \frac{\sqrt{Bb}}{3}h\right| \Rightarrow E = h\left|\frac{\sqrt{Bb}}{3} - \frac{B}{6} - \frac{b}{6}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{h}{6}\left|B - 2\sqrt{Bb} + b\right| \Rightarrow E = \frac{h}{6}(\sqrt{B} - \sqrt{b})^2$$

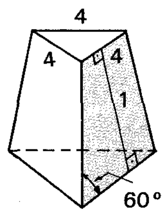
784. $\frac{h}{3}[B + \sqrt{Bb} + b] = 40 \Rightarrow \frac{3}{3}[20 + \sqrt{20b} + b] = 40 \Rightarrow$

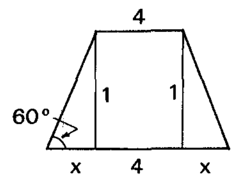
$\Rightarrow b + 2\sqrt{5}\sqrt{b} - 20 = 0 \Rightarrow \sqrt{b} = 5 - \sqrt{5} \Rightarrow b = 30 - 10\sqrt{5}$

Sendo ℓ e L os lados da base menor e da base maior do tronco, respectivamente, temos:

$$\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{b}{B} \Rightarrow \left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \frac{30 - 10\sqrt{5}}{20} \Rightarrow \frac{\ell}{L} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

785.

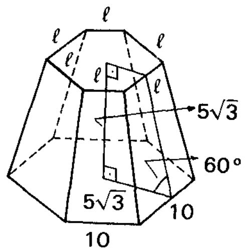


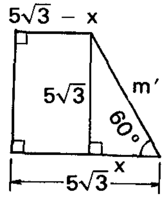


$$\text{tg } 60° = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ dm}$$

$$A_{face} = \frac{(2x + 4)\cdot 1}{2} = A_{face} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + 4}{2} \Rightarrow A_{face} = \frac{\sqrt{3} + 6}{3}\ dm^2$$

$$A_\ell = 3\,A_{face} \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot \frac{\sqrt{3} + 6}{3} \Rightarrow A_\ell = (\sqrt{3} + 6)\ dm^2$$





786. $\text{sen } 60° = \frac{5\sqrt{3}}{m'} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{m'} \Rightarrow m' = 10\text{ cm}$

$$\text{tg } 60° = \frac{5\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 5\text{ cm}$$

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{x} = 5\sqrt{3} - 5 \Rightarrow \ell = \frac{30 - 10\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$$

$$A_{face} = (L + \ell)\cdot\frac{m'}{2} \Rightarrow A_{face} = \left(10 + \frac{30 - 10\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{10}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{face} = \frac{300 - 50\sqrt{3}}{3}\ cm^2$$

$$A_\ell = 6\cdot A_{face} \Rightarrow A_\ell = \cancel{6}\cdot\frac{300 - 50\sqrt{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow A_\ell = (600 - 100\sqrt{3})\ cm^2$$

$$B = \frac{3}{2}\cdot L^2\sqrt{3} \Rightarrow B = \frac{3}{2}\cdot 10^2\sqrt{3} \Rightarrow B = 150\sqrt{3}$$

$$b = \frac{3}{2}\cdot\ell^2\sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{30 - 10\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\sqrt{3} \Rightarrow b = (200\sqrt{3} - 300)\ cm^2$$

$$A_t = A_\ell + B + b \Rightarrow A_t = 600 - 100\sqrt{3} + 150\sqrt{3} + 200\sqrt{3} - 300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = (300 + 250\sqrt{3})\ cm^2 \Rightarrow A_t = 50(6 + 5\sqrt{3})\ cm^2$$

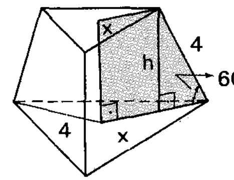
787. $B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{7^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{49\sqrt{3}}{4}\ dm^2$

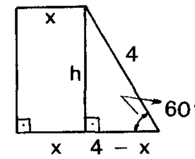
$$b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{25\sqrt{3}}{4}\ dm^2$$

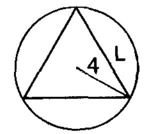
$$\frac{h}{3}[B + \sqrt{Bb} + b] = V \Rightarrow h[B + \sqrt{Bb} + b] = 3V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\left[\frac{49\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{49\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{25\sqrt{3}}{4}} + \frac{25\sqrt{3}}{4}\right] = 3\,109 \Rightarrow h = 4\sqrt{3}\text{ dm}$$

792.







Base maior

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\text{ m};$$

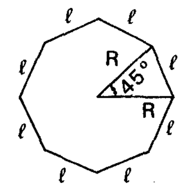
$$\cos 60° = \frac{4 - x}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4 - x}{4} \Rightarrow x = 2\text{ m}$$

$$L = R\sqrt{3} \Rightarrow L = 4\sqrt{3}\text{ m};\ B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = 12\sqrt{3}\ m^2$$

$$\ell = x\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3}\text{ m};\ b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = 3\sqrt{3}\ m^2$$

$$V = \frac{h}{3}[B + \sqrt{Bb} + b] \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[12\sqrt{3} + \sqrt{12\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} + 3\sqrt{3}\right] \Rightarrow V = 42\ m^3$$

793. Cálculo da área do octógono regular em função do lado:



Lei dos cossenos:

$$\ell^2 = R^2 + R^2 - 2\cdot R\cdot R\cdot\cos 45° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\cdot\ell^2$$

$$A_{octó.} = 8\cdot\frac{R\cdot R\cdot\text{sen } 45°}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{octó.} = 2R^2\sqrt{2} \Rightarrow A_{octó.} = 2\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)\ell^2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow A_{octó.} = 2(\sqrt{2} + 1)\,\ell^2$$

$$B = 2(\sqrt{2} + 1)\,L^2 \Rightarrow B = 2(\sqrt{2} + 1)\cdot 4^2 \Rightarrow B = 32(\sqrt{2} + 1)\ cm^2$$

$$b = 2(\sqrt{2} + 1)\,\ell^2 \Rightarrow b = 2(\sqrt{2} + 1)\cdot 2^2 \Rightarrow b = 8(\sqrt{2} + 1)\ cm^2$$

$$V_T = \frac{h}{3}[B + \sqrt{Bb} + b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{12}{3}[32(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{32(\sqrt{2} + 1)\cdot 8(\sqrt{2} + 1)} + 8(\sqrt{2} + 1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_T = 4[40(\sqrt{2} + 1) + 16(\sqrt{2} + 1)] \Rightarrow V_T = 224(\sqrt{2} + 1)\ cm^3$$

Seja *H* a altura da pirâmide total e *h* a altura da pirâmide obtida quando o tronco é eliminado. Temos:

$$\frac{H}{h} = \frac{4}{2} \Rightarrow \frac{H}{H - 12} = 2 \Rightarrow H = 24\text{ cm}$$

$$V_p = \frac{1}{3}\cdot B\cdot H \Rightarrow V_p = \frac{1}{3}\cdot 32(\sqrt{2} + 1)\cdot 24 \Rightarrow V_p = 256(\sqrt{2} + 1)\ cm^3$$

794. a) $B = \dfrac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow B = 6\text{ cm}^2$

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{h}{\frac{h}{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{B}{b} = 4 \Rightarrow \frac{6}{b} = 4 \Rightarrow b = \frac{3}{2}\text{ m}^2$$

b) Seja OH a altura relativa à hipotenusa do triângulo OAB.

Temos $(OA) \cdot (OB) = (AB) \cdot (OH) \Rightarrow 3 \cdot 4 = 5 \cdot (OH) \Rightarrow (OH) = \dfrac{12}{5}$ m.

Teorema das três perpendiculares $\Rightarrow \overline{CH} \perp \overline{AB}$

$$S_{ABC} = 12 \Rightarrow \frac{(AB) \cdot (CH)}{2} = 12 \Rightarrow \frac{5 \cdot CH}{2} = 12 \Rightarrow CH = \frac{24}{5}\text{ m}$$

$$\Delta OCH\text{: } (OH)^2 + (OC)^2 = (CH)^2 \Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^2 + (OC)^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OC = \frac{12\sqrt{3}}{5}\text{ m}$$

$$V = \frac{\frac{OC}{2}}{3}[B + \sqrt{Bb} + b] \Rightarrow V = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{3}\left[6 + \sqrt{6 \cdot \frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{21\sqrt{3}}{5}\text{ m}^3$$

810. $x^2 + 20^2 = 30^2 \Rightarrow x = 10\sqrt{5}$ cm

$V_{cil.} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{cil.} = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 \Rightarrow$

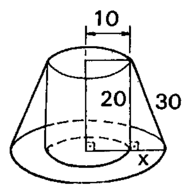
$\Rightarrow V_{cil.} = 2\,000\pi\text{ cm}^3$

$$V_{TC} = \frac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{TC} = \frac{\pi \cdot 20}{3}[(10 + 10\sqrt{5})^2 + (10 + 10\sqrt{5}) \cdot 10 + 10^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{TC} = \frac{20\pi}{3}[800 + 300\sqrt{5}]$$

$$\frac{V_{cil.}}{V_{TC}} = \frac{2\,000\pi \cdot 3}{(800 + 300\sqrt{5}) \cdot 20\pi} \Rightarrow \frac{V_{cil.}}{V_{TC}} = \frac{3}{8 + 3\sqrt{5}}$$



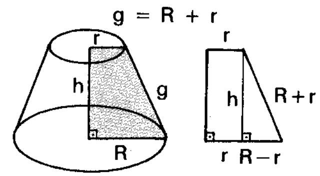
820.
$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \dfrac{\pi \cdot h}{3}(14^2 + 14 \cdot 8 + 8^2) = \dfrac{\pi \cdot h}{3} \cdot 372 \\ V_2 = \dfrac{\pi \cdot h}{3}(8^2 + 8r + r^2) \\ V_1 = 3V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3(r^2 + 8r + 64) = 372 \Rightarrow r^2 + 8r - 60 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 2\sqrt{19} - 4 \Rightarrow r^2 = 4(23 - 4\sqrt{19})$

$$\frac{A_{b_2}}{A_{b_1}} = \frac{4(23 - 4\sqrt{19})\pi}{196\pi} \Rightarrow \frac{A_{b_2}}{A_{b_1}} = \frac{23 - 4\sqrt{19}}{49}$$

821.



a) $h^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2 \Rightarrow h^2 = 2R \cdot 2r \Rightarrow \dfrac{h}{2} = \sqrt{Rr}$

b) $V = \dfrac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2] \Rightarrow V = \dfrac{2\pi h}{6}[R^2 + Rr + r^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{\pi h}{6}[2R^2 + 2Rr + 2r^2] \Rightarrow V = \dfrac{\pi h}{6}[2R^2 + Rr + Rr + 2r^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{\pi h}{6}[R(2R + r) + r(2r + R)] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{\pi h}{6}[R(R + R + r) + r(r + r + R)] \Rightarrow$

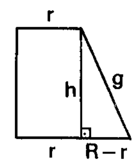
$\Rightarrow V = \dfrac{\pi h}{6}[R(R + g) + r(r + g)] \Rightarrow V = \dfrac{h \cdot \pi}{6}[R(R + g) + r(r + g)] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{h}{6} \cdot A_t$

822. $V = \dfrac{a^2 h\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2] = \dfrac{a^2 h \pi}{3} \Rightarrow R^2 + Rr + r^2 = a^2$ (1)

$h^2 + (R - r)^2 = g^2 \Rightarrow (R - r)^2 = g^2 - h^2$ (2)

$R - r = \sqrt{g^2 - h^2}$ (3)



(1) − (2) $\Rightarrow 3Rr = a^2 - g^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rr = \dfrac{a^2 - g^2 + h^2}{3}$ (4)

Somando Rr a ambos os membros de (1), vem:

$R^2 + Rr + r^2 + Rr = a^2 + Rr \Rightarrow (R + r)^2 = a^2 + \dfrac{a^2 - g^2 + h^2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow R + r = \sqrt{\dfrac{4a^2 + h^2 - g^2}{3}}$. (5)

$$③ \text{ e } ⑤ \Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{4a^2 + h^2 - g^2}{3}} + \sqrt{g^2 - h^2}\right) \\ r = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{4a^2 + h^2 - g^2}{3}} - \sqrt{g^2 - h^2}\right) \end{cases}$$

Condição para existência da solução:

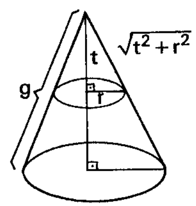
$$\left.\begin{matrix} 4a^2 + h^2 - g^2 > 0 \\ g^2 - h^2 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} h^2 > g^2 - 4a^2 \\ g^2 > h^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g^2 - 4a^2 < h^2 < g^2$$

833. Sejam: V o volume da pirâmide;
V_T o volume do tronco da pirâmide;
V_P o volume da pirâmide menor;
V o volume procurado.

$$V_P + V_T = V \Rightarrow \frac{1}{8}V_T + V_T = V \Rightarrow V_T = \frac{8}{9}V$$

$$\frac{V_P}{V_T} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_P}{\frac{8}{9}V} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_P}{V} = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{d}{h}\right)^3 = \frac{1}{9} \Rightarrow d = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}h$$

834. Sejam B e b as áreas das bases do tronco de cone. Temos:

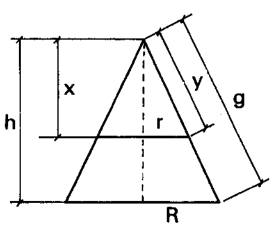


$$b = \pi r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{b}{\pi}$$

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{g}{\sqrt{t^2 + \frac{b}{\pi}}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B}{b} = \frac{g^2}{t^2 + \frac{b}{\pi}} \Rightarrow b = \frac{Bt^2\pi}{\pi g^2 - B}$$

836.



$$\frac{x}{h} = \frac{y}{g} = \frac{r}{R} = k$$

$$h = \sqrt{g^2 - R^2}$$

$$A_{\ell_1} = A_{t_2} \Rightarrow \pi Rg = \pi ry + \pi r^2 \Rightarrow Rg = kg \cdot k \cdot R + k^2R^2 \Rightarrow$$

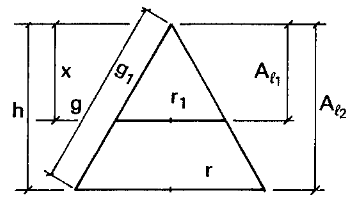
$$\Rightarrow Rg = k^2R(g + R) \Rightarrow k^2 = \frac{g}{g + R} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{g}{g + R}}$$

Mas $x = k \cdot h$.

$$\text{Assim: } x = \sqrt{\frac{g}{g + R}} \cdot \sqrt{g^2 - R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{g(g + R)(g - R)}{g + R}} \Rightarrow x = \sqrt{g(g - R)}$$

838.



$$\frac{x}{h} = \frac{g_1}{g} = \frac{r_1}{r} = k$$

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

$$A_b^2 = A_{\ell_1} \cdot (A_\ell - A_{\ell_1}) \Rightarrow (\pi r^2k^2)^2 = \pi rk \cdot gk(\pi rg - \pi rkgk) \Rightarrow$$

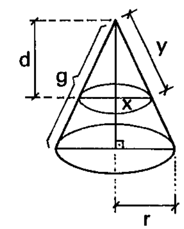
$$\Rightarrow \pi^2r^4k^4 = \pi^2r^2g^2k^2(1 - k^2) \Rightarrow r^2k^2 = g^2(1 - k^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2(g^2 + r^2) = g^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{g^2}{g^2 + r^2}}$$

Mas $x = k \cdot h$.

$$\text{Assim: } x = \sqrt{\frac{g^2}{g^2 + r^2}} \cdot \sqrt{g^2 - r^2} \Rightarrow x = g\sqrt{\frac{g^2 - r^2}{g^2 + r^2}}.$$

839. $\dfrac{y}{g} = \dfrac{x}{r} \Rightarrow y = \dfrac{xg}{r}$



$$\pi x^2 = \pi rg - \pi xy \Rightarrow x^2 = rg - xy$$

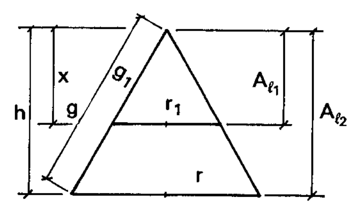
$$\Rightarrow x^2 = rg - \frac{x^2g}{r} \Rightarrow x^2 = \frac{r^2g}{r + g}$$

$$y^2 = \frac{x^2g^2}{r^2} \Rightarrow y^2 = \frac{r^2g}{r + g} \cdot \frac{g^2}{r^2} \Rightarrow y^2 = \frac{g^3}{r + g}$$

Substituindo x^2 e y^2 em $d^2 = y^2 - x^2$, vem:

$$d^2 - g(g - r) \Rightarrow d = \sqrt{g^2 - rg}.$$

840.



$$\frac{x}{h} = \frac{g_1}{g} = \frac{r_1}{r} = k$$

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

$$A_{\ell_1} + \cancel{A_{b_1}} = A_{\ell_2} - A_{\ell_1} + \cancel{A_{b_1}} + A_{b_2} \Rightarrow 2A_{\ell_1} = A_{\ell_2} + A_{b_2} \Rightarrow$$

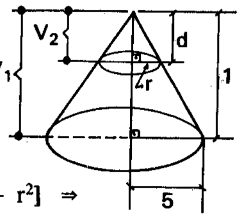
$\Rightarrow 2k^2\pi rg = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow 2k^2g = g + r \Rightarrow k = \sqrt{\dfrac{g + r}{2g}}$

Mas $x = k \cdot h$.

Assim: $x = \sqrt{\dfrac{g + r}{2g}} \cdot \sqrt{g^2 - r^2} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{(g + r)^2(g - r)}{2g}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = (g + r)\sqrt{\dfrac{g - r}{2g}}$

841. $\left(\dfrac{d}{1}\right)^3 = \dfrac{V_2}{V_1} \Rightarrow d^3 = \dfrac{\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot d}{\frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 1} \Rightarrow r = 5d$



$\sqrt{V_1 \cdot V_2} = V_{tronco} \Rightarrow$

$\sqrt{\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot d} = \dfrac{\pi(1 - d)}{3}[5^2 + 5r + r^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^2 \cdot \sqrt{d^3} = (1 - d)[5^2 + 5 \cdot 5d + 5^2d^2] \Rightarrow d^3 + \sqrt{d^3} = 1$

Fazendo $a = d^3$, temos:

$a + \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$

Note que $d = \sqrt[3]{\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ não convém como resposta, pois, neste caso, $d > 1$.

Resposta: $d = \sqrt[3]{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}}$ cm.

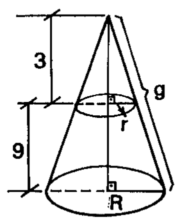
842. $A_t = 320\pi \text{ m}^2 \Rightarrow \pi Rg + \pi R^2 = 320\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \dfrac{320 - R^2}{R}$ ①

$g^2 = R^2 + 12^2$ ②

① em ② $\Rightarrow \left(\dfrac{320 - R^2}{R}\right)^2 = R^2 + 12^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \dfrac{80}{7}$ m



Por semelhança: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{3}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{80}{7} \Rightarrow r = \dfrac{20}{7}$ m

$V_T = \dfrac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2] \Rightarrow V_T = \dfrac{\pi \cdot 9}{3}\left[\left(\dfrac{80}{7}\right)^2 + \dfrac{80}{7} \cdot \dfrac{20}{7} + \left(\dfrac{20}{7}\right)^2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow V_T = \dfrac{3\,600\pi}{7}$ m³

$g^2 = R^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = \left(\dfrac{80}{7}\right)^2 + 144 \Rightarrow g = \dfrac{116}{7}$ m

Cálculo da área lateral do tronco:

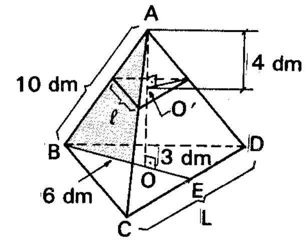
$A_\ell = \pi(R + r)g \Rightarrow A_\ell = \pi\left(\dfrac{80}{7} + \dfrac{20}{7}\right) \cdot \dfrac{116}{7} \Rightarrow A_\ell = \dfrac{11\,600}{49}\pi$ m²

846. *O* é baricentro do ΔBCD: BO = 6 dm.

Pitágoras no ΔAOB: AO = 8 dm.

$\dfrac{L\sqrt{3}}{2} = BE \Rightarrow \dfrac{L\sqrt{3}}{2} = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow L = 6\sqrt{3}$ dm



$\dfrac{\ell}{L} = \dfrac{AO'}{AO} \Rightarrow \dfrac{\ell}{6\sqrt{3}} = \dfrac{4}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sqrt{3}$ dm

$B = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \dfrac{(6\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = 27\sqrt{3}$ dm²

$b = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \dfrac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ dm²

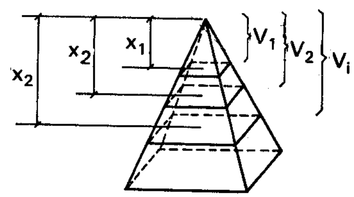
$V = \dfrac{h}{3}[B + \sqrt{Bb} + b] \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\left[27\sqrt{3} + \sqrt{27\sqrt{3} \cdot \dfrac{27\sqrt{3}}{4}} + \dfrac{27\sqrt{3}}{4}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 63\sqrt{3}$ dm³

851. Suponhamos, sem perda de generalidade, uma pirâmide quadrangular regular, como mostra a figura. Por semelhança, temos:

$\left(\dfrac{x_1}{h}\right)^3 = \dfrac{V_1}{V} \Rightarrow \left(\dfrac{x_1}{h}\right)^3 = \dfrac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = h\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}$



$\left(\dfrac{x_2}{h}\right)^3 = \dfrac{V_2}{V} \Rightarrow \left(\dfrac{x_2}{h}\right)^3 = \dfrac{2}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = h\sqrt[3]{\dfrac{2}{n}}$

$\vdots$

$\left(\dfrac{x_i}{h}\right)^3 = \dfrac{V_i}{V} \Rightarrow \left(\dfrac{x_i}{h}\right)^3 = \dfrac{i}{n} \Rightarrow x_i = h\sqrt[3]{\dfrac{i}{n}}$

855. Seja d_1 e d_2 as distâncias procuradas. Temos:

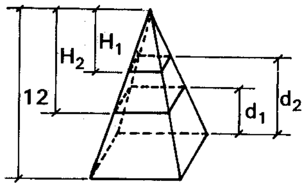
$$\frac{H_2}{12} = \frac{\sqrt[3]{27+98}}{\sqrt[3]{27+98+91}} \Leftrightarrow H_2 = 10\ \text{cm}$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{27+98}} \Rightarrow$$

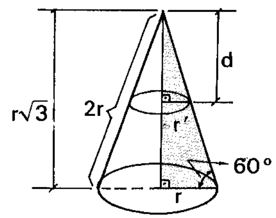
$$\frac{H_1}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow H_1 = 6\ \text{cm}$$

$$d_1 = 12 - H_2 \Rightarrow d_1 = 12 - 10 \Rightarrow d_1 = 2\ \text{cm}$$

$$d_2 = 12 - H_1 \Rightarrow d_2 = 12 - 6 \Rightarrow d_2 = 6\ \text{cm}$$

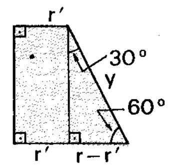


856. Por trigonometria obtemos as medidas indicadas na figura.
Por semelhança, temos:



$$\frac{d}{r\sqrt3} = \frac{r'}{r} \Rightarrow r' = \frac{d}{\sqrt3}$$

$$y = 2\cdot(r - r') \Rightarrow y = 2\left(r - \frac{d}{\sqrt3}\right)$$



$$A_{Tcone} = \pi\cdot r\cdot 2r + \pi r^2 \Rightarrow A_{Tcone} = 3\pi r^2$$

$$A_{Ttronco} = \frac{7}{8}A_{Tcone}$$

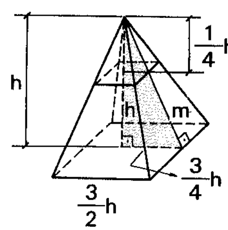
$$\pi(r + r')\cdot y + \pi r^2 + \pi r'^2 = \frac{7}{8}\cdot 3\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(r + \frac{d}{\sqrt3}\right)\cdot 2\left(r - \frac{d}{\sqrt3}\right) + r^2 + \frac{d^2}{3} = \frac{21}{8}r^2 \Rightarrow d = \frac{3\sqrt2}{4}r$$

857. $m^2 = h^2 + \left(\frac{3}{4}h\right)^2 \Rightarrow m = \frac{5}{4}h$

$$A_\ell = 240\ m^2 \Rightarrow 4\cdot\frac{\frac{3}{2}\cdot h\cdot m}{2} = 240 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3h\cdot\frac{5}{4}h = 240 \Rightarrow h = 8\ m$$



$$\frac{b}{B} = \left(\frac{\frac{1}{4}h}{h}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{1}{16}\cdot B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{2}h\right)^2 \Rightarrow b = \frac{1}{16}\cdot\frac{9}{4}\cdot 8^2 \Rightarrow b = 9\ m^2$$

858. Seja *d* a distância procurada e *h* a altura do cone.
Temos:

$$h^2 + R^2 = g^2 \Rightarrow h^2 = g^2 - R^2$$

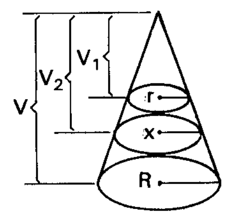
$$A_{secção} = A_\ell \Rightarrow \pi r^2 = \pi Rg \Rightarrow r^2 = Rg$$

$$\frac{d^2}{g^2 - R^2} = \frac{\cancel{\pi}r^2}{\cancel{\pi}R^2} \Rightarrow \frac{d^2}{g^2 - R^2} = \frac{Rg}{R^2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{Rg(g^2 - R^2)}}{R}$$

861. $\frac{V_1}{V} = \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow V_1 = \frac{r^3}{R^3}V$ (1)

$$\frac{V_2}{V} = \frac{x^3}{R^3} \Rightarrow V_2 = \frac{x^3}{R^3}V \quad (2)$$

$$\frac{V_2 - V_1}{V - V_2} = \frac{a}{b} \quad (3)$$



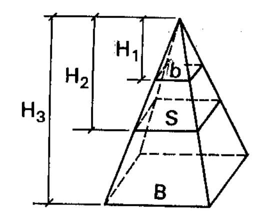
(1) e (2) em (3):

$$\frac{\frac{x^3}{R^3}V - \frac{r^3}{R^3}V}{V - \frac{x^3}{R^3}V} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x^3 - r^3}{R^3 - x^3} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{aR^3 + br^3}{a + b}}$$

862. $\left(\frac{H_1}{H}\right)^2 = \frac{b}{B} \Rightarrow H_1 = \frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$ (1)

$$\left(\frac{H_2}{H}\right)^2 = \frac{S}{p} \Rightarrow H_2 = \frac{H\sqrt{S}}{\sqrt{B}} \quad (2)$$

$$\frac{SH_2 - bH_1}{BH - SH_2} = \frac{p}{q} \xRightarrow{(1),(2)}$$



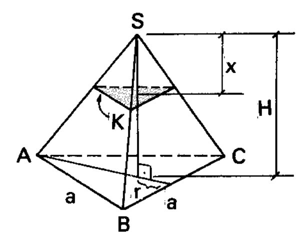
$$\Rightarrow \frac{\frac{SH\sqrt{S}}{\sqrt{B}} - \frac{bH\sqrt{b}}{\sqrt{B}}}{BH - \frac{SH\sqrt{S}}{\sqrt{B}}} = \frac{p}{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S^3} - \sqrt{b^3}}{\sqrt{B^3} - \sqrt{S^3}} = \frac{p}{q} \Rightarrow S = \sqrt[3]{\left(\frac{pB\sqrt{B} + qb\sqrt{b}}{p + q}\right)^2}$$

863. $r = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt3}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt3}{6}$

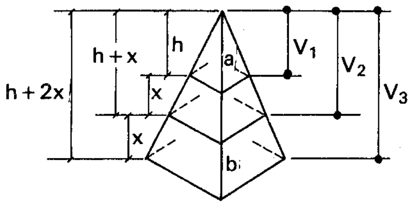
$$k = \pi r^2 \Rightarrow k = \pi\left(\frac{a\sqrt3}{6}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\pi a^2}{12}$$



$$\left(\frac{x}{H}\right)^2 = \frac{\frac{\pi a^2}{12}}{\frac{a^2\sqrt3}{4}} \Rightarrow x = H\sqrt{\frac{\pi}{3\sqrt3}}$$

865.



Dados: áreas das bases: a e b.
Pedido:

$$y = \frac{V_2 - V_1}{V_3 - V_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{(h + x)^3}{h^3} \Rightarrow \dfrac{V_2 - V_1}{V_2} = \dfrac{(h + x)^3 - h^3}{(h + x)^3} \\[2ex] \dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{(h + 2x)^3}{(h + x)^3} \Rightarrow \dfrac{V_3 - V_2}{V_2} = \dfrac{(h + 2x)^3 - (h + x)^3}{(h + x)^3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{(h + x)^3 - h^3}{(h + 2x)^3 - (h + x)^3}$$

Fatorando as diferenças de cubos, vem:

$$y = \frac{x[(h + x)^2 + (h + x)h + h^2]}{x[(h + 2x)^2 + (h + 2x)(h + x) + (h + x)^2]} = \frac{3h^2 + 3hx + x^2}{3h^2 + 9hx + 7x^2} \quad (1)$$

Usando a semelhança, temos:

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{h + 2x}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{h + 2x}{h} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{2x}{h} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

Preparando a expressão (1) e substituindo $\dfrac{x}{h}$, temos:

$$y = \frac{3 + 3 \cdot \dfrac{x}{h} + \dfrac{x^2}{h^2}}{3 + 9\dfrac{x}{h} + 7\dfrac{x^2}{h^2}} = \frac{3 + 3 \cdot \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} + \dfrac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{4a}}{3 + 9\dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} + 7\dfrac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{4a}} =$$

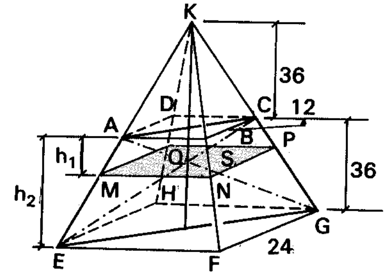
$$= \frac{12a + 6\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) + (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{12a + 18\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) + 7(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2} =$$

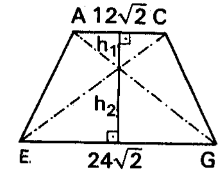
$$= \frac{12a + 6\sqrt{ab} - 6a + b - 2\sqrt{ab} + a}{12a + 18\sqrt{ab} - 18a + 7b - 14\sqrt{ab} + 7a} \Rightarrow y = \frac{7a + 4\sqrt{ab} + b}{a + 4\sqrt{ab} + 7b}$$

866. De acordo com as medidas indicadas nas figuras, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h_1}{h_1} = \dfrac{12\sqrt{2}}{24\sqrt{2}} \\[2ex] h_1 + h_2 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow (h_1 = 12 \text{ cm}, h_2 = 24 \text{ cm})$$

$$\frac{S}{S_{ABCD}} = \left(\frac{h_1 + 36}{36}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{12^2} = \left(\frac{12 + 36}{36}\right)^2 \Rightarrow S = 256 \text{ cm}^2$$





Sejam $V_{KABCD} = V_1$; $V_{KMNPQ} = V_2$; $V_{KEFGH} = V$. Temos:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 36 \Rightarrow V_1 = 1\,728 \text{ cm}^3$$

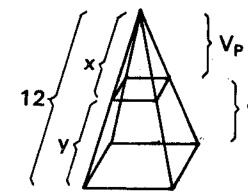
$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 256 \cdot 48 \Rightarrow V_2 = 4\,096 \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot 72 \Rightarrow V = 13\,824 \text{ cm}^3$$

$$V_{T_1} = V_2 - V_1 \Rightarrow V_{T_1} = 4\,096 - 1\,728 \Rightarrow V_{T_1} = 2\,368 \text{ cm}^3$$

$$V_{T_2} = V - V_2 \Rightarrow V_{T_2} = 13\,824 - 4\,096 \Rightarrow V_{T_2} = 9\,728 \text{ cm}^3$$

867. $\dfrac{V_P}{V_T} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow V_T = \dfrac{5}{3}V_P$



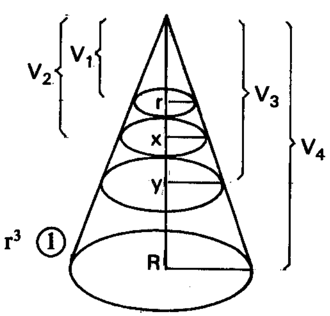
$$V = V_P + V_T \Rightarrow V = V_P + \frac{5}{3}V_P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_P}{V} = \frac{3}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_P}{V} = \dfrac{3}{8} \\[2ex] \dfrac{V_P}{V} = \left(\dfrac{x}{12}\right)^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^3}{12^3} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = 6\sqrt[3]{3} \text{ cm}$$

$$x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x \Rightarrow y = 12 - 6\sqrt[3]{3} \Rightarrow y = 6(2 - \sqrt[3]{3}) \text{ cm}$$

868. $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{r}{x}\right)^3 \Rightarrow V_1 = \dfrac{r^3}{x^3} \cdot V_2$



Analogamente:

$$V_3 = \frac{y^3}{x^3} \cdot V_2; \; V_4 = \frac{R^3}{y^3} \cdot V_3$$

$$V_2 - V_1 = V_3 - V_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2V_2 = V_1 + V_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2V_2 = \frac{r^3}{x^3} \cdot V_2 + \frac{y^3}{x^3} \cdot V_2 \Rightarrow 2x^3 - y^3 = r^3 \quad (1)$$

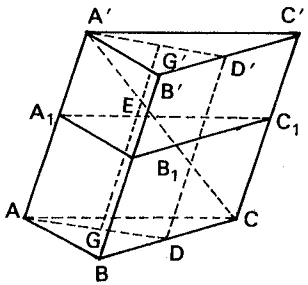
$$V_3 - V_2 = V_4 - V_3 \Rightarrow 2V_3 = V_2 + V_4 \Rightarrow 2V_3 = \frac{x^3}{y^3} \cdot V_3 + \frac{R^3}{y^3} \cdot V_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y^3 - x^3 = R^3 \quad (2)$$

$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow \left(x = \sqrt[3]{\frac{2r^3 + R^3}{3}}, \; y = \sqrt[3]{\frac{r^3 + 2R^3}{3}} \right)$$

$$\therefore \; \frac{\pi x^2}{\pi y^2} = \sqrt[3]{\frac{2r^3 + R^3}{r^3 + 2R^3}}$$

876. Seja o tronco de prisma indicado na figura.



Temos:

$$V = S_{A_1B_1C_1} \cdot \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$

Devemos demonstrar que

$$\frac{AA' + BB' + CC'}{3} = GG'$$

em que G e G' são os baricentros das duas bases. Traçamos as medianas AD, $A'D'$; depois DD'; GG' e a diagonal $A'D$ do trapézio $AA'D'D$; sendo E a interseção de $A'D$ e GG', temos, observando que GG' é paralela às bases desse trapézio:

$$\frac{EG}{AA'} = \frac{DG}{DA} = \frac{1}{3} \Rightarrow EG = \frac{AA'}{3}$$

$$\frac{EG'}{DD'} = \frac{A'G'}{A'D'} = \frac{2}{3} \Rightarrow EG' = \frac{2\,DD'}{3}$$

Trapézio $BCC'B'$: $DD' = \dfrac{BB' + CC'}{2} \Rightarrow 2\,DD' = BB' + CC'$

Assim: $EG' = \dfrac{BB' + CC'}{3}$.

$$GG' = EG + EG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$

Capítulo XIV — Inscrição e circunscrição de sólidos

902.

Fig. 1

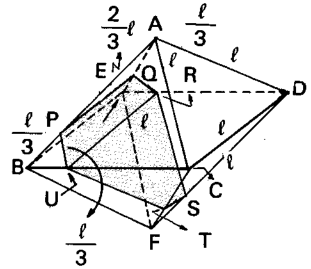


Fig. 2

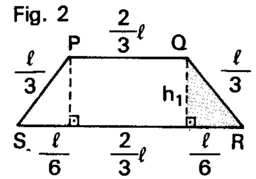
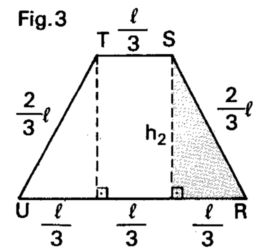


Fig.3



Seja ℓ a medida da aresta do octaedro.

Devido ao paralelismo e à semelhança entre os triângulos formados nas faces do octaedro, temos as medidas indicadas nas figuras 1, 2 e 3 acima.

Nos triângulos hachurados das figuras 2 e 3:

$$h_1^2 + \frac{\ell^2}{36} = \frac{\ell^2}{9} \Rightarrow h_1 = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} \Rightarrow S_{PQRS} = \left[\frac{\left(\ell + \frac{2}{3}\ell\right)\frac{\ell\sqrt{3}}{6}}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{PQRS} = \frac{5\ell^2\sqrt{3}}{36}$$

$$h_2^2 + \frac{\ell^2}{9} = \frac{4\ell^2}{9} \Rightarrow h_2 = \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{RSTU} = \left[\frac{\left(\frac{\ell}{3} + \ell\right)\frac{\ell\sqrt{3}}{3}}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{RSTU} = \frac{2\ell^2\sqrt{3}}{9}$$

Se R é o raio da esfera circunscrita, temos:

$$R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \ell = 6$$

$$S_{\text{secção}} = S_{PQRS} + S_{RSTU} \Rightarrow S_{\text{secção}} = \frac{5 \cdot 6^2\sqrt{3}}{36} + \frac{2 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3}}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\text{secção}} = 13\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

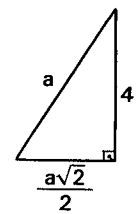
911. Sejam A a aresta do tetraedro circunscrito e a a aresta do tetraedro inscrito na esfera de raio r. Temos:

$$r = \frac{A\sqrt{6}}{12} \Rightarrow A = 2\sqrt{6}\,r$$

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{6}}r \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A^3}{a^3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{(2\sqrt{6}\,r)^3}{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}r\right)^3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 27$$

914. a: aresta do octaedro
x: aresta do cubo

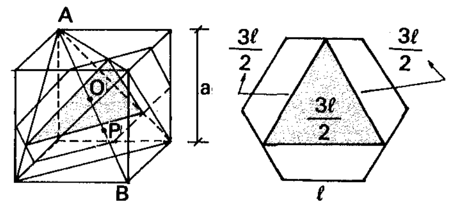


$$a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}\text{ cm}$$

$$A_t = 6x^2 \Rightarrow A_t = 6\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2 \Rightarrow A_t = \frac{128}{3}\text{ cm}^2$$

919.



De acordo com as figuras acima, temos:

$$OP = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OP = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$AP = 2\,PB$$

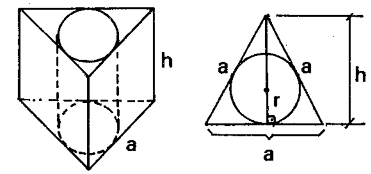
$$\left.\begin{aligned} AP &= \frac{2a\sqrt{3}}{3} \\ AO &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AO}{OP} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow \frac{AO}{OP} = 3$$

$$\frac{A_{S_{\text{tetra.}}}}{A_{S_{\text{cubo}}}} = \frac{\frac{\left(\frac{3}{2}\ell\right)^2\sqrt{3}}{4}}{6\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \frac{A_{S_{\text{tetra.}}}}{A_{S_{\text{cubo}}}} = \frac{3}{8}$$

922. $r = \frac{1}{3}h \Rightarrow r = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

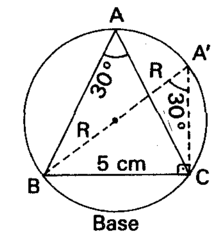
$$A_{\ell_{\text{prisma}}} = 3ah$$

$$A_{\ell_{\text{cilindro}}} = 2\pi rh \Rightarrow A_{\ell_{\text{cilindro}}} = 2\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot h \Rightarrow A_{\ell_{\text{prisma}}} = \frac{\pi a\sqrt{3}\,h}{3}$$



$$\frac{A_{\ell_{\text{prisma}}}}{A_{\ell_{\text{cilindro}}}} = \frac{3ah}{\frac{\pi a\sqrt{3}\,h}{3}} \Rightarrow \frac{A_{\ell_{\text{prisma}}}}{A_{\ell_{\text{cilindro}}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

925. Note o triângulo retângulo $A'BC$ ($A'B$ é diâmetro).



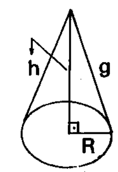
$$\text{sen } 30° = \frac{5}{2R} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{2R} \Rightarrow$$

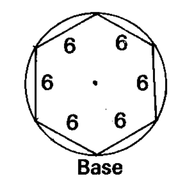
$$\Rightarrow R = 5\text{ cm}$$

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow V = \pi\cdot(5)^2\cdot 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 300\pi\text{ cm}^3$$

933. $4\pi R^2 = 144\pi \Rightarrow R = 6\text{ cm}$





$$g = \frac{5}{3}R \Rightarrow g = \frac{5}{3}\cdot 6 \Rightarrow g = 10\text{ cm}$$

$$R^2 + h^2 = g^2 \Rightarrow 6^2 + h^2 = 10^2 \Rightarrow$$

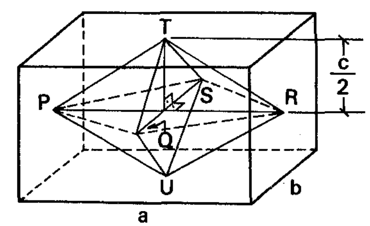
$$h = 8\text{ cm}$$

$$\left.\begin{aligned} V_c &= \frac{\pi R^2 h}{3} \Rightarrow V_c = \frac{\pi\cdot 6^2\cdot 8}{3} \Rightarrow V_c = 96\pi\text{ cm}^3 \\ V_{\text{esf.}} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_{\text{esf.}} = \frac{4}{3}\pi\cdot 6^3 \Rightarrow V_{\text{esf.}} = 288\pi\text{ cm}^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V_c}{V_{\text{esf.}}} = \frac{1}{3}$$

$$B = \frac{3}{2}\cdot R^2\sqrt{3} \Rightarrow B = \frac{3}{2}\cdot 6^2\sqrt{3} \Rightarrow B = 54\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

$$V = \frac{Bh}{3} \Rightarrow V = \frac{54\sqrt{3}\cdot 8}{3} \Rightarrow V = 144\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

935. Note que $PQRS$ é um losango.

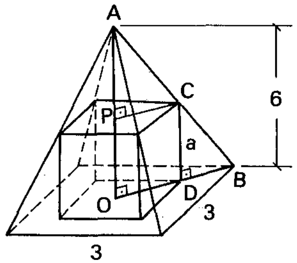


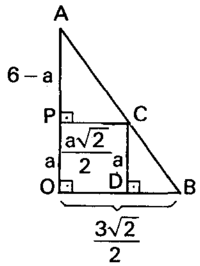
$$V_{\text{octaedro}} = 2\cdot\frac{1}{3}S_{PQRS}\cdot\frac{c}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{octaedro}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a\cdot b}{2}\right)\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\text{octaedro}} = \frac{abc}{6}$$

937.

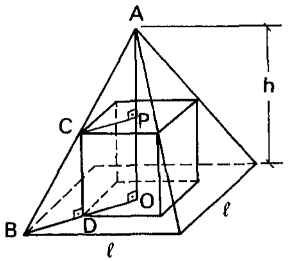


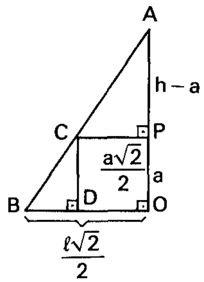


$$\Delta APC \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{6-a}{6} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a = 2 \text{ m}$$

$$V = a^3 \Rightarrow V = 2^3 \Rightarrow V = 8 \text{ m}^3$$

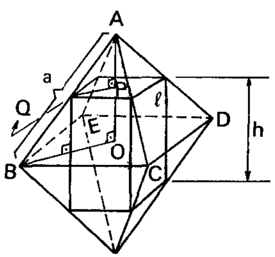
938.

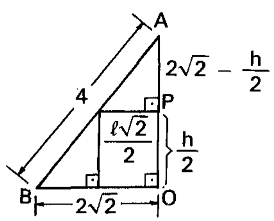




$$\Delta APC \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{h-a}{h} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \ell = \frac{ha}{h-a}$$

939.





$$A_{octa.} = 32\sqrt{3} \text{ m}^2 \Rightarrow \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3} \Rightarrow a = 4 \text{ m}$$

$$BO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BO = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BO = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

$$A_{\ell_{prisma}} = 12\sqrt{2} \text{ m}^2 \Rightarrow 4\ell h = 12\sqrt{2} \Rightarrow \ell h = 3\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\Delta APQ \sim \Delta AOB \Rightarrow \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} - \frac{h}{2} \Rightarrow h = 4\sqrt{2} - \ell\sqrt{2} \quad (2)$$

$$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow \ell(4\sqrt{2} - \ell\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} \Rightarrow \ell^2 - 4\ell + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell = 3 \text{ m} \\ \text{ou} \\ \ell = 1 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \sqrt{2} \text{ m} \\ \text{ou} \\ h = 3\sqrt{2} \text{ m} \end{cases}$$

Sendo $V = \ell^2 \cdot h$, temos:

$V = 3^2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow V = 9\sqrt{2} \text{ m}^3$

ou

$V = 1^2 \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow V = 3\sqrt{2} \text{ m}^3$

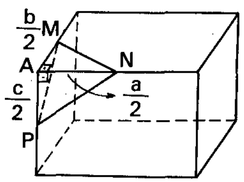
940. $$V_{AMNP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}{2} \cdot \frac{c}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{AMNP} = \frac{abc}{48}$$

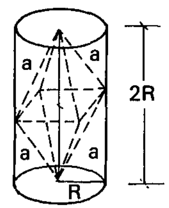
$$V_{poli.} = V_{paral.} - 8V_{AMNP} \Rightarrow$$

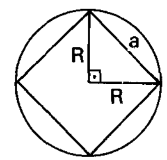
$$V_{poli.} = abc - 8 \cdot \frac{abc}{48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{poli.} = \frac{5}{6}abc$$



942.





Base

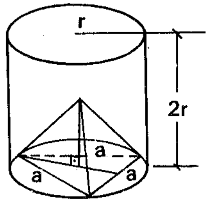
$$a = R\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$V_{cil.} = \pi R^2 \cdot 2R \Rightarrow V_{cil.} = 2\pi R^3 \Rightarrow V_{cil.} = 2\pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 \Rightarrow V_{cil.} = \frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{V_{octa.}}{V_{cil.}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{3}}{\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{V_{octa.}}{V_{cil.}} = \frac{2}{3\pi}$$

943. $V_{cil.} = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow V_{cil.} = 2\pi r^3$

$a = r\sqrt{3}$



$V_{tetra.} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow$

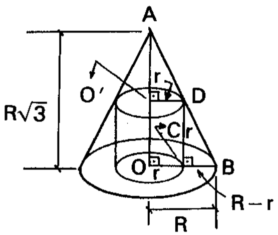
$\Rightarrow V_{tetra.} = \dfrac{(r\sqrt{3})^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tetra.} = \dfrac{r^3\sqrt{6}}{4}$

$V_{cil.} - V_{tetra.} = 2\pi r^3 - \dfrac{r^3\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V_{cil.} - V_{tetra.} = \dfrac{(8\pi - \sqrt{6})}{4} r^3$

$\pi r^2 h = \dfrac{8\pi - \sqrt{6}}{4} r^3 \Rightarrow h = \dfrac{8\pi - \sqrt{6}}{4\pi} r$

945. $V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot R\sqrt{3} \Rightarrow$



$V_{cone} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} R^3$

$V_{cil.} = \pi r^2 \cdot r \Rightarrow V_{cil.} = \pi r^3$ ①

$\Delta ABO \sim \Delta DBC \Rightarrow \dfrac{R}{R\sqrt{3}} = \dfrac{R - r}{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} R$ ②

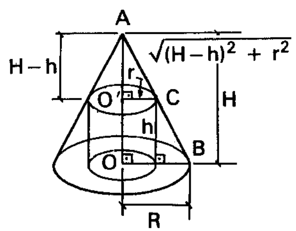
② em ① $\Rightarrow V_{cil.} = \pi\left(\dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)^3 \Rightarrow V_{cil.} = \dfrac{(27 - 15\sqrt{3})}{4}\pi$

$\dfrac{V_{cone}}{V_{cil.}} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} \cdot R^3 \cdot \dfrac{4}{(27 - 15\sqrt{3})\pi} \Rightarrow \dfrac{V_{cone}}{V_{cil.}} = \dfrac{2(3\sqrt{3} + 5)}{9}$

946. $A_{\ell_{cp}}$: área lateral do cone parcial

$A_{\ell_{cil}}$: área lateral do cilindro

$A_{\ell_{cil}} = A_{\ell_{cp}} \Rightarrow$



$\Rightarrow 2\pi rh = \pi r\sqrt{(H - h)^2 + r^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2h = \sqrt{(H - h)^2 + r^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4h^2 = (H - h)^2 + r^2$ ①

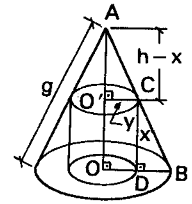
$\Delta ABO \sim \Delta ACO' \Rightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{H}{H - h} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{R(H - h)}{H}$ ②

② em ① $\Rightarrow 4h^2 = (H - h)^2 + \left[\dfrac{R(H - h)}{H}\right]^2 \Rightarrow h = \dfrac{H\sqrt{H^2 + R^2}}{2H + \sqrt{H^2 + R^2}}$ ③

③ em ② $\Rightarrow r = \dfrac{R\left(H - \dfrac{H\sqrt{H^2 + R^2}}{2H + \sqrt{H^2 + R^2}}\right)}{H} \Rightarrow r = \dfrac{2RH}{2H + \sqrt{H^2 + R^2}}$

947. $A_{\ell_{cone\ menor}} = A_{\ell_{cil.}} \Rightarrow$



$\Rightarrow \pi y\sqrt{(h - x)^2 + y^2} = 2\pi yx \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(h - x)^2 + y^2} = 2x$ ①

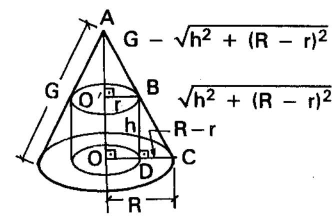
$\Delta AOB \sim \Delta AO'C \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{h}{g} = \dfrac{h - x}{\sqrt{(h - x)^2 + y^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(h - x)^2 + y^2} = \dfrac{g(h - x)}{h}$ ②

② em ① $\Rightarrow \dfrac{g(h - x)}{h} = 2x \Rightarrow x = \dfrac{gh}{2h + g}$

948. $\Delta AOC \sim \Delta AO'B \Rightarrow$



$\Rightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{G}{G - \sqrt{h^2 + (R - r)^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow G - \sqrt{h^2 + (R - r)^2} = \dfrac{Gr}{R}$ ①

$A_{\ell_{cone\ menor}} = A_{\ell_{coroa}} \Rightarrow$

$\pi r(G - \sqrt{h^2 + (R - r)^2}) = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow r(G - \sqrt{h^2 + (R - r)^2}) = R^2 - r^2 \Rightarrow$

$\xRightarrow{①} r\left(\dfrac{Gr}{R}\right) = R^2 - r^2 \Rightarrow r = R\sqrt{\dfrac{R}{G + R}}$ ②

$\Delta AOC \sim \Delta BDC \Rightarrow \dfrac{\sqrt{G^2 - R^2}}{h} = \dfrac{R}{R - r} \Rightarrow$

$\xRightarrow{②} \dfrac{\sqrt{G^2 - R^2}}{h} = \dfrac{R}{R - R\sqrt{\dfrac{R}{G + R}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{G - R}\,(\sqrt{G + R} - \sqrt{R})$

949. $\Delta AO'B \sim \Delta AOC \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow r = \dfrac{R}{2}$

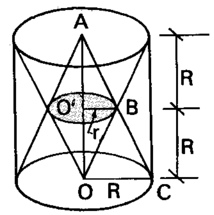
$V_{tronco} = \dfrac{\pi h}{3}[R^2 + R \cdot r + r^2]$

$$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot R}{3}\left[R^2 + R \cdot \frac{R}{2} + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{7\pi R^3}{12}$$

$$V = V_{cilin.} - 2V_{tronco}$$

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{7\pi R^3}{12} \Rightarrow V = \frac{5}{6}\pi R^3$$



951. $\dfrac{A_{t_{cil.}}}{A_{t_{cone}}} = \dfrac{7}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2\pi R(R + H)}{\pi R(R + G)} = \frac{7}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R + H}{R + G} = \frac{7}{8} \Rightarrow$$

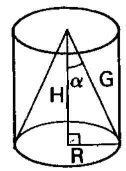
$$\Rightarrow \frac{G \operatorname{sen} \alpha + G \cos \alpha}{G \operatorname{sen} \alpha + G} = \frac{7}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha + 8 \cos \alpha = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha + 8(\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}) = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 65 \operatorname{sen}^2\alpha - 14 \operatorname{sen} \alpha - 15 = 0 \Rightarrow \left(\operatorname{sen} \alpha = \frac{-5}{13} \text{ ou } \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore \alpha = \operatorname{arc\,sen} \frac{3}{5}$$

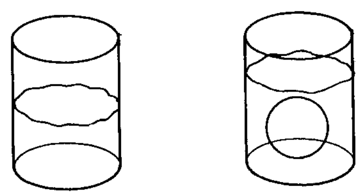


965. $V_{cil.} = \pi r^2 h$

$V_{esf.} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Antes: $\pi r^2 h$

Depois: $\pi r^2 h + \dfrac{4}{3}\pi R^3$



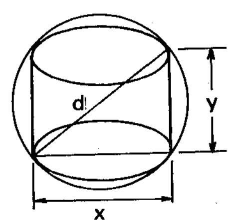
$$\pi r^2(h + h') = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow h' = \frac{4R^3}{3r^2}$$

967. $2\pi \dfrac{x}{2} \cdot y = \pi a^2 \Rightarrow x \cdot y = a^2$

$$\begin{cases} xy = a^2 \\ x^2 + y^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 2a^2 \\ x^2 + y^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = \sqrt{d^2 + 2a^2} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -2xy = -2a^2 \\ x^2 + y^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow x - y = \sqrt{d^2 - 2a^2} \quad (2)$$



$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow \left(x = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2};\ y = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}\right)$$

Condição: $d^2 - 2a^2 \geqslant 0 \Rightarrow d \geqslant a\sqrt{2}$

970. Na figura:

$x^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow x = 3$

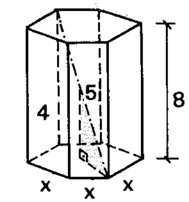
$B = \dfrac{3}{2}x^2\sqrt{3} \Rightarrow B = \dfrac{3}{2} \cdot 3^2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\ m^2$

$A_{face} = 3 \cdot 8 \Rightarrow A_{face} = 24\ m^2$

$A_t = 6 \cdot A_{face} + 2B \Rightarrow A_t = 6 \cdot 24 + 2 \cdot 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 9(16 + 3\sqrt{3})\ m^2$

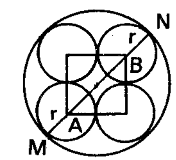


971. Consideremos a projeção da esfera com suas esferas inscritas no plano que contém uma das faces do cubo, conforme a figura indica. Temos:

$AB = 2r\sqrt{2}$

$MN = 2r + AB \Rightarrow MN = 2r + 2r\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = 2r(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow r = R(\sqrt{2} - 1)$



972. Sejam C_1 e C_2 o centro de duas esferas, conforme indicado na figura.

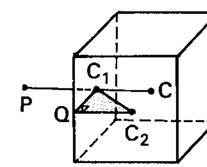
$C_1C_2 = 8\text{ cm} \Rightarrow \dfrac{a}{2}\sqrt{2} = 8 \Rightarrow a = 8\sqrt{2}\text{ cm}$

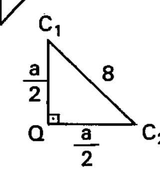
C é o centro do cubo; P pertence à esfera de raio C_1 $\therefore$ $C_1P = 4$.

CP é a distância procurada. Daí:

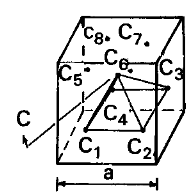
$CP = \dfrac{a}{2} + 4 \Rightarrow CP = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} + 4 \Rightarrow$

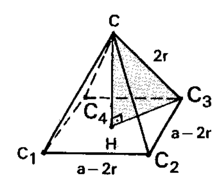
$\Rightarrow CP = 4(\sqrt{2} + 1)\text{ cm}.$

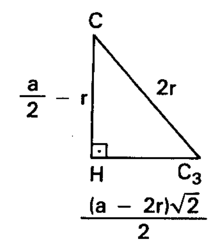




973.







Sejam: $C, C_1, C_2 \ldots C_8$ os centros das esferas.

ΔCHC_3:

$$\frac{a^2}{4} - ar + r^2 + \frac{2(a^2 - 4ar + 4r^2)}{4} = 4r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 12ra - 4r^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{3} r$$

Note que $a = \dfrac{6 - 4\sqrt{3}}{3} r < r$, e então: $a = \dfrac{2}{3}(2\sqrt{3} + 3)r$.

974. $V_1 = V_{cubo} - V_{esf.} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_1 = a^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \Rightarrow$$

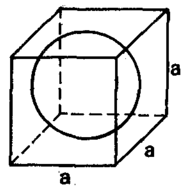
$$\Rightarrow V_1 = \frac{6 - \pi}{6} a^3 \quad (1)$$

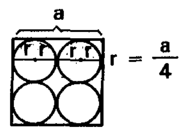
$$V_2 = V_{cubo} - 8V_{esf.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = a^3 - 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi\left(\frac{a}{4}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{6 - \pi}{6} a^3 \quad (2)$$

(1) e (2) $\Rightarrow V_1 = V_2$





975. $2R = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

$$R' = \frac{a}{2} \Rightarrow R' = \frac{\frac{2R\sqrt{3}}{3}}{3} \Rightarrow R' = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$2R' = a'\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2R\sqrt{3}}{3} = a'\sqrt{3} \Rightarrow a' = \frac{2}{3} R$$

$$A_{C'} = 6(a')^2 \Rightarrow A_{C'} = 6 \cdot \left(\frac{2}{3} R\right)^2 \Rightarrow A_{C'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overbrace{4R^2 \cdot \pi}^{S}}{\pi} \Rightarrow A_{C'} = \frac{2S}{3\pi}$$

982. $\Delta ABC \sim \Delta ADO \Rightarrow$

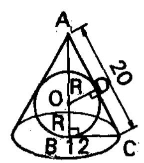
$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AO} = \frac{BC}{DO} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16}{AD} = \frac{20}{16 - R} = \frac{12}{R} \Rightarrow$$

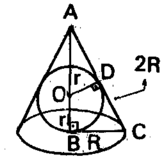
$$\Rightarrow 20R = 192 - 12R \Rightarrow$$

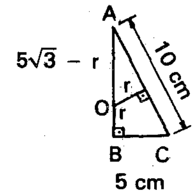
$$\Rightarrow 32R = 192 \Rightarrow R = \frac{96}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 6 \text{ cm} \Rightarrow 2R = 12 \text{ cm}$$



984.





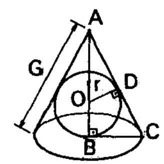
$$A_{\ell cone} = 50\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow \pi R \cdot 2R = 50\pi \Rightarrow R = 5 \text{ cm}$$

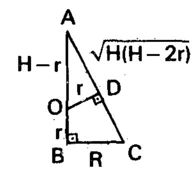
$$\Delta ABC \Rightarrow AB^2 = 100 - 25 \Rightarrow AB = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ADO \Rightarrow \frac{5\sqrt{3} - r}{10} = \frac{r}{5} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$A_{esf.} = 4\pi r^2 \Rightarrow A_{esf.} = 4\pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A_{esf.} = \frac{100\pi}{3} \text{ cm}^2$$

986.





a) $\Delta ABC \Rightarrow G^2 = H^2 + R^2 \Rightarrow H = \sqrt{G^2 - R^2}$

$$\Delta AOD \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{H - r}{G} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{G^2 - R^2} - r}{G} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{R\sqrt{G^2 - R^2}}{G + R}$$

b) $\Delta ABC \Rightarrow G^2 = R^2 + H^2 \Rightarrow R = \sqrt{G^2 - H^2}$

$$\Delta AOD \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{G^2 - H^2}} = \frac{H - r}{G} \Rightarrow r = \frac{H\sqrt{G^2 - H^2}}{G + \sqrt{G^2 - H^2}}$$

c) $\Delta ABC \Rightarrow G^2 = H^2 + R^2 \Rightarrow G = \sqrt{H^2 + R^2}$

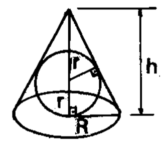
$$\Delta AOD \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{H - r}{\sqrt{H^2 + R^2}} \Rightarrow r = \frac{RH}{\sqrt{H^2 + R^2} + R}$$

d) $\Delta ABC \sim \Delta ADO \Rightarrow \dfrac{G}{H} = \dfrac{H - r}{\sqrt{H(H - 2r)}} \Rightarrow G = \dfrac{H(H - r)}{\sqrt{H(H - 2r)}}$

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{\sqrt{H(H - 2r)}} \Rightarrow R = \frac{Hr}{\sqrt{H(H - 2r)}}$$

987. Pelo exercício anterior, temos:

$$R = \frac{r \cdot h}{\sqrt{h(h - 2r)}} ; \; G = \frac{h(h - r)}{\sqrt{h(h - 2r)}} .$$



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2h^2}{h \cdot (h - 2r)} \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h^2}{3(h - 2r)}$$

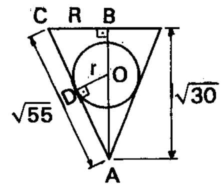
$$A_\ell = \pi R G \Rightarrow A_\ell = \pi \cdot \frac{rh}{\sqrt{h(h - 2r)}} \cdot \frac{h(h - r)}{\sqrt{h(h - 2r)}} \Rightarrow A_\ell = \frac{\pi r h(h - r)}{h - 2r}$$

989. $\Delta ABC: (\sqrt{55})^2 = (\sqrt{30})^2 + R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 5$ cm

$\Delta AOD \sim \Delta ACB$

$$\frac{r}{3} = \frac{5}{\sqrt{30}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{30}}{2} \text{ cm}$$

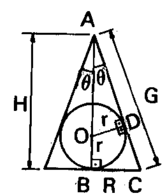


990. $$\frac{A_{\ell_{esf.}}}{A_{t_{cone}}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{4\pi r^2}{\pi R(R + G)} = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9r^2 = R^2 + RG$ ①

$$\Delta AOD \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{r}{H - r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{H\,\text{sen}\,\theta}{1 + \text{sen}\,\theta} \; ②$$



$$\Delta ABC \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{R}{H} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R = H\,\text{tg}\,\theta$ ③

$$\Delta ABC \Rightarrow \cos\theta = \frac{H}{G} \Rightarrow G = \frac{H}{\cos\theta} \; ④$$

②, ③ e ④ em ①

$$\frac{9(H\,\text{sen}\,\theta)^2}{(1 + \text{sen}\,\theta)^2} = H^2\,\text{tg}^2\,\theta + H\,\text{tg}\,\theta \cdot \frac{H}{\cos\theta} \Rightarrow 9\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos^2\theta = (1 + \text{sen}\,\theta)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\,\text{sen}\,\theta\,(1 - \text{sen}^2\,\theta) = (1 + \text{sen}\,\theta)^3 \Rightarrow 9\,\text{sen}\,\theta\,(1 - \text{sen}\,\theta) = (1 + \text{sen}\,\theta)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\,\text{sen}^2\,\theta - 7\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{5} \Rightarrow 2\theta = 2\,\text{arc sen}\,\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

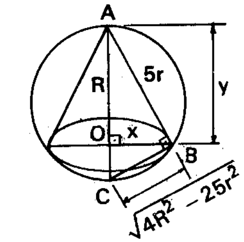
Resposta: $\frac{\pi}{3}$ ou $2 \cdot \text{arc sen}\,\frac{1}{5}$.

991. $\Delta ABO: y^2 + x^2 = 25r^2$ ①

Relações métricas no ΔABC (produto dos catetos = hipotenusa × altura) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 5r \cdot \sqrt{4R^2 - 25r^2} = 2R \cdot x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{5r \cdot \sqrt{4R^2 - 25r^2}}{2R} \; ②$$

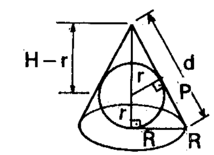


② em ①:

$$y^2 = 25r^2 - \frac{25r^2(4R^2 - 25r^2)}{4R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{25r^2}{2R}$$

992. $$\begin{cases} \frac{R}{r} = \frac{H}{d} \\ (H - r)^2 = d^2 + r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Rd = rH \\ H^2 - 2Hr = d^2 \end{cases}$$



$\Rightarrow H^2 - 2Hr - d^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow H = r + \sqrt{d^2 + r^2}$

$$Rd = rH \Rightarrow R = \frac{rH}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{r \cdot (r + \sqrt{d^2 + r^2})}{d}$$

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi \cdot \left[\frac{r^2(r + \sqrt{d^2 + r^2})^2}{d^2}\right] \cdot [1 + \sqrt{d^2 + r^2}]}{3} \Rightarrow$$

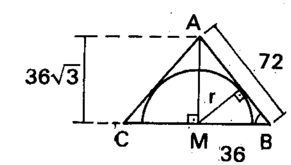
$$\Rightarrow V = \frac{\pi r^2(r + \sqrt{d^2 + r^2})^3}{3d^2}$$

993. Relações métricas no ΔABM:

$36 \cdot 36\sqrt{3} = 72 \cdot r \Rightarrow r = 18\sqrt{3}$ cm

$A = 2\pi r^2 + \pi r^2 \Rightarrow A = 3\pi r^2 \Rightarrow$

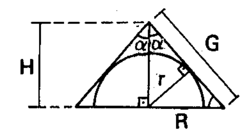
$\Rightarrow A = 3\pi(18\sqrt{3})^2 \Rightarrow A = 2\,916\pi$



994. $r = H \cdot \text{sen}\,\alpha$ (1)

$R = H \cdot \text{tg}\,\alpha$ (2)

$$H = G \cdot \cos\alpha \Rightarrow G = \frac{H}{\cos\alpha} \; (3)$$



$$\frac{S_{cone}}{S_{esf.}} = \frac{18}{5} \Rightarrow \frac{\pi R^2 + \pi RG}{2\pi r^2} = \frac{18}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R^2 + RG}{2r^2} = \frac{18}{5} \Rightarrow$$

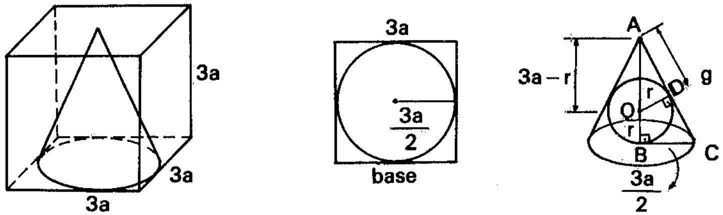
$$\xrightarrow{(1),\,(2)\text{ e }(3)} \frac{H^2\,tg^2\,\alpha + H\,tg\,\alpha \cdot H\cos\alpha}{2H^2 \cdot sen^2\,\alpha} = \frac{18}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36\,sen^2\,\alpha - 36\,sen\,\alpha + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(sen\,\alpha = \frac{5}{6} \text{ ou } sen\,\alpha = \frac{1}{6}\right)$$

$$\therefore \left(2\alpha = 2\text{ arc sen }\frac{5}{6} \text{ ou } 2\alpha = 2\text{ arc sen }\frac{1}{6}\right)$$

995.



$$\Delta ABC \Rightarrow g^2 = (3a)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \Rightarrow g = \frac{3\sqrt{5}}{2}a \text{ (1)}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ADO \Rightarrow \frac{3a - r}{g} = \frac{r}{\frac{3a}{2}} \xRightarrow{(1)} \frac{3a - r}{\frac{3\sqrt{5}}{2}a} = \frac{r}{\frac{3a}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{3a(\sqrt{5} - 1)}{4}$$

$$V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{3a(\sqrt{5} - 1)}{4}\right]^3 \Rightarrow V_{esf.} = \frac{9\pi a^3(\sqrt{5} - 2)}{2}$$

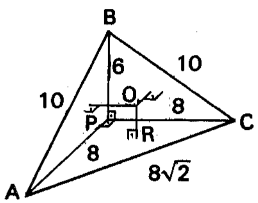
998. $\Delta ABP \Rightarrow PA^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow PA = 8$ cm

$\Delta BCP \Rightarrow PC^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow PC = 8$ cm

$S_{ABP} = S_{BCP} = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABP} = S_{BCP} = 24$ cm^2

$S_{ACP} = \frac{8 \cdot 8}{2} \Rightarrow S_{ACP} = 32$ cm^2



Cálculo da área do ΔABC:

$p = \frac{10 + 10 + 8\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = (10 + 4\sqrt{2})$ cm

$S_{ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{(10 + 4\sqrt{2})(10 + 4\sqrt{2} - 10)^2(10 + 4\sqrt{2} - 8\sqrt{2})} \Rightarrow$

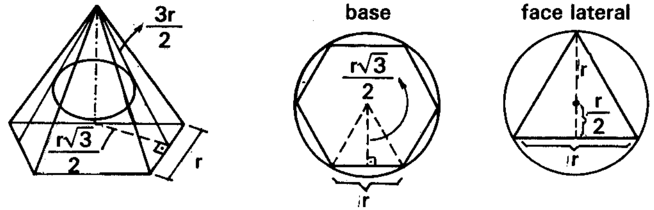
$\Rightarrow S_{ABC} = 8\sqrt{34}$ cm^2

$V_{OPAB} + V_{OPAC} + V_{OPBC} + V_{OABC} = V_{PABC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{3}S_{ABP} \cdot R + \frac{1}{3}S_{ACP} \cdot R + \frac{1}{3}S_{BCP} \cdot R + \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot R = \frac{1}{3}S_{ACP} \cdot PB \Rightarrow$

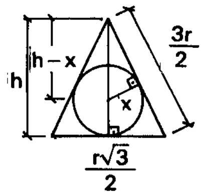
$\Rightarrow \frac{R}{3} \cdot (24 + 32 + 24 + 8\sqrt{34}) = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 6 \Rightarrow R = \frac{4(10 - \sqrt{34})}{11}$ cm

999.



O apótema da base mede $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.

O apótema da pirâmide é igual à altura da face e mede $\frac{3r}{2}$.



Cálculo da altura h da pirâmide:

$h^2 = \left(\frac{3r}{2}\right)^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$h^2 = \frac{6r^2}{4} \Rightarrow h = \frac{r\sqrt{6}}{2}$.

Cálculo do raio x da esfera:

Da semelhança vem:

$$\frac{x}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{h - x}{\frac{3r}{2}} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{h}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow x = \frac{h(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$

Ou seja: $x = \frac{r\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)}{4}$.

Cálculo dos volumes:

a) Da esfera:

$$V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{r\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1)}{4}\right]^3 = \frac{\sqrt{6}}{4}(3\sqrt{3} - 5)\pi r^3$$

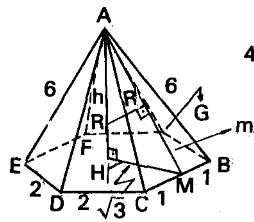
b) Da pirâmide:

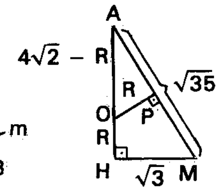
$$V_{pir.} = \frac{1}{3}\left[6 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}\right] \cdot \frac{r\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}r^3$$

Então:

$$\frac{V_{pir.}}{V_{esf.}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}r^3 \cdot \frac{4}{\sqrt{6}(3\sqrt{3} - 5)\pi r^3} = \frac{9 + 5\sqrt{3}}{2\pi}.$$

1000.



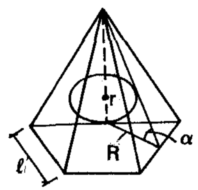


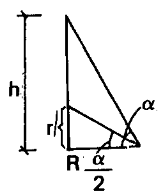
$\Delta ABM \Rightarrow m^2 = 36 - 1 \Rightarrow m = \sqrt{35}$

$\Delta AHM \Rightarrow h^2 = m^2 - (\sqrt{3}\,)^2 \Rightarrow h^2 = 35 - 3 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$

$\Delta AHM \sim \Delta AOP \Rightarrow \dfrac{R}{4\sqrt{2} - R} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{35}} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{210} + 3\sqrt{2}}{8}$

1001.





r = raio da esfera
R = raio da circunferência inscrita na base

$\dfrac{r}{R} = tg\,\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow r = R\,tg\,\dfrac{\alpha}{2}$

$\dfrac{h}{R} = tg\,\alpha \Rightarrow h = R \cdot tg\,\alpha$

$\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = R \Rightarrow \ell = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

Calculando os volumes:

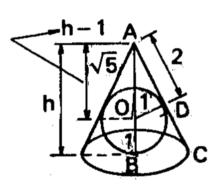
$V_{esf.} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_{esf.} = \dfrac{4}{3}\pi R^3\,tg^3\,\dfrac{\alpha}{2}$

$V_{pir.} = \dfrac{1}{3}\left(6 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2R\sqrt{3}}{3} \cdot R\right) \cdot R \cdot tg\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} R^3\,tg\,\alpha$

Então:

$\dfrac{V_{esf.}}{V_{pir.}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3\,tg^3\,\dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{3}{2\sqrt{3}\,R^3\,tg\,\alpha} = \dfrac{2\sqrt{3}\,\pi\,tg^3\dfrac{\alpha}{2}}{3\,tg\,\alpha}$

1008. $2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot h \Rightarrow h = \sqrt{5} + 1$



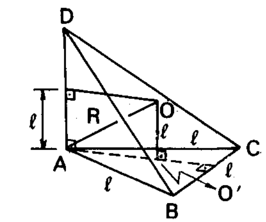
$\Delta AOD \Rightarrow AO = h - 1 \Rightarrow AO = \sqrt{5}$

$\Delta AOD \Rightarrow AD^2 = AO^2 - OD^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AD^2 = (\sqrt{5}\,)^2 - 1^2 \Rightarrow AD = 2$

$\Delta AOD \sim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{R}{1} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$

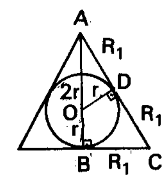
1009. O lugar geométrico de todos os pontos que eqüidistam de A, B e C é a reta perpendicular ao plano por A, B e C, passando pelo circuncentro do ΔABC.
O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de A e D é o plano mediador do segmento AD. Logo, o centro da esfera circunscrita ao tetraedro $ABCD$ é a interseção desses dois lugares.

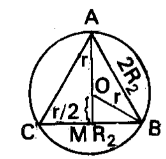


$AO' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO' = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{3}$

$\Delta AOO' \Rightarrow AO^2 = AO'^2 + OO'^2 \Rightarrow R^2 = \left(\dfrac{\ell\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \ell^2 \Rightarrow R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,\ell$

1014.





$\Delta AOD \Rightarrow R_1^2 = (2r)^2 - r^2 \Rightarrow R_1 = r\sqrt{3}$

$A_{t_{cone\ circunsc.}} = \pi R_1(R_1 + 2R_1) \Rightarrow A_{t_{cone\ circ.}} = \pi r\sqrt{3}\,(r\sqrt{3} + 2r\sqrt{3}\,) \Rightarrow$

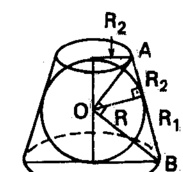
$\Rightarrow A_{t_{cone\ circ.}} = 9\pi r^2$ (1)

$\Delta OBM \Rightarrow R_2^2 = r^2 - \left(\dfrac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow R_2 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

$A_{t_{cone\ insc.}} = \pi R_2(R_2 + 2R_2) \Rightarrow A_{t_{cone\ insc.}} = \pi \dfrac{r\sqrt{3}}{2}\left(3 \cdot \dfrac{r\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow A_{t_{cone\ insc.}} = \dfrac{9\pi r^2}{4}$ (2)

(1) e (2) $\Rightarrow A_{t_{cone\ insc.}} = \dfrac{1}{4} A_{t_{cone\ circ.}}$

1018. Rel. métricas $\Delta AOB \Rightarrow R_1R_2 = R^2$ (1)



$V_{tronco} = 3 \cdot V_{esf.} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\pi 2R}{3}(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2) = 3 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2 = 6R^2$ (2)

De (1) e (2) $\Rightarrow \begin{cases} R_1 + R_2 = R\sqrt{7} \\ R_1 - R_2 = R\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(R_1 = \frac{\sqrt7+\sqrt3}{2}R;\ R_2 = \frac{\sqrt7-\sqrt3}{2}R\right)$$

$$A_{tronco} = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi(R_1+R_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{tronco} = \pi\left[\left(\frac{\sqrt7+\sqrt3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt7-\sqrt3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt7}{2}\right)^2\right]R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{tronco} = 12\pi R^2$$

1025. $V_{cone} = V_{cil.} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_{cone} = 3h_{cil.}$ (1)

ΔOAM:

$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$

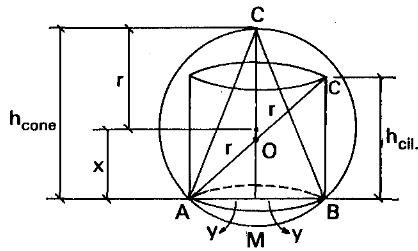
$\Rightarrow x^2 = r^2 - y^2$ (2)

ΔABC: $h_{cil.}^2 = (2r)^2 - (2y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_{cil.} = \sqrt{4r^2 - 4y^2}$ (3)

(2) e (3) em (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow r + x = 3\sqrt{4r^2 - 4y^2} \Rightarrow x = \frac{r}{5}$



1027. Por semelhança:

$\frac{1}{R} = \frac{3}{8} \Rightarrow R = \frac{8}{3}$ dm.

$b = \frac{3}{2} r^2\sqrt3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}\cdot 1^2\sqrt3 \Rightarrow$

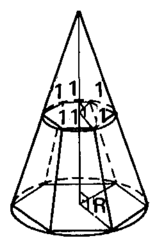
$\Rightarrow b = \frac{3\sqrt3}{2}$ dm²

$B = \frac{3}{2}\cdot R^2\sqrt3 \Rightarrow B = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2\sqrt3 \Rightarrow$

$\Rightarrow B = \frac{32\sqrt3}{3}$ dm²

$V = \frac{h}{3}[B + \sqrt{Bb} + b] \Rightarrow V = \frac{5}{3}\left[\frac{32\sqrt3}{3} + \sqrt{\frac{32\sqrt3}{3}\cdot\frac{3\sqrt3}{2}} + \frac{3\sqrt3}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{485\sqrt3}{18}$ dm³



1028. ΔAO'D ~ ΔAMC $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{2\sqrt3} = \frac{4-x}{6} \Rightarrow a^2 = \frac{16 - 8x + x^2}{3}$ (1)

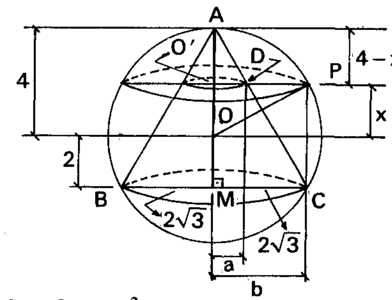
ΔOO'P $\Rightarrow x^2 + b^2 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = 16 - x^2$ (2)

$A_{coroa} = A_{\substack{base\\ cone}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi(b^2 - a^2) = \pi(2\sqrt3)^2 \Rightarrow$

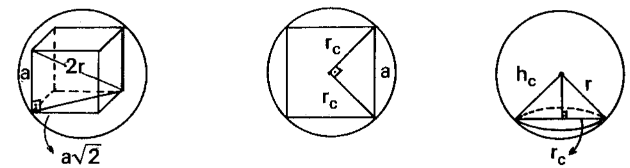
$\Rightarrow b^2 - a^2 = 12$ (3)



(1) e (2) em (3) $\Rightarrow 16 - x^2 - \frac{16 - 8x + x^2}{3} = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ m

1029. Cubo e esfera Base do cubo e do cone



$a^2 + (a\sqrt2)^2 = (2r)^2 \Rightarrow a = \frac{2\sqrt3}{3}r$ (1)

$a = r_c\sqrt2 \xRightarrow{(1)} \frac{2\sqrt3}{3}r = r_c\sqrt2 \Rightarrow r_c = \frac{2\sqrt3}{3\sqrt2}r$ (2)

$h_c^2 = r^2 - r_c^2 \Rightarrow h_c^2 = r^2 - \left(\frac{2\sqrt3}{3\sqrt2}r\right)^2 \Rightarrow h_c = \frac{r\sqrt3}{3}$

$V_c = \frac{\pi r_c^2\cdot h}{3} \Rightarrow V_c = \frac{\pi\cdot\frac{2}{3}r^2\cdot\frac{r\sqrt3}{3}}{3} \Rightarrow V_c = \frac{2\pi r^3\sqrt3}{27}$

1030. ΔADO' ~ ΔAEO $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{h-2}{h-5} \Rightarrow h = 8$

ΔADO' $\Rightarrow AD^2 = (AO')^2 - (DO')^2 \Rightarrow$

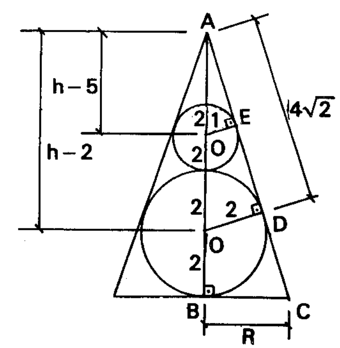
$\Rightarrow AD^2 = 6^2 - 2^2 \Rightarrow AD = 4\sqrt2$

ΔABC ~ ΔADO' $\Rightarrow$

$\frac{R}{2} = \frac{8}{4\sqrt2} \Rightarrow R = 2\sqrt2$

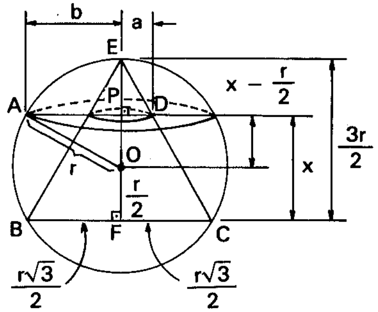
$V = V_{cone} - V_{esf.1} - V_{esf.2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{4}{3}\pi R_1^3 - \frac{4}{3}\pi R_2^3 \Rightarrow$



$$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 8}{3} - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2)^3 \Rightarrow V = \frac{28\pi}{3} \text{ cm}^3$$

1033.



Área da coroa = Área da base do cone $\Rightarrow \pi(b^2 - a^2) = \pi\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b^2 - a^2 = \frac{3r^2}{4} \quad (1)$$

$$\Delta POA \Rightarrow b^2 = r^2 - \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{3r^2 - 4x^2 + 4xr}{4} \quad (2)$$

$$\Delta EPD \sim \Delta EFC \Rightarrow \frac{a}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3r}{2} - x}{\frac{3r}{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{27r^2 + 12x^2 - 36rx}{36} \quad (3)$$

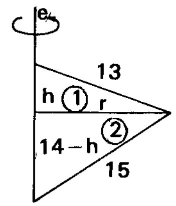
(2) e (3) em (1):

$$\frac{3r^2 - 4x^2 + 4xr}{4} - \frac{27r^2 + 12x^2 - 36rx}{36} = \frac{3}{4}r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 24rx + 9r^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}r$$

Capítulo XV — Superfícies e sólidos de revolução

1037.



$$\left.\begin{array}{l} r^2 = 13^2 = h^2 \\ r^2 = 15^2 - (14 - h)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 29 + 28h - h^2 = 169 - h^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 5$ cm
Então, $r = 12$ cm.
$V = V_1 + V_2$
Assim,

$$V = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot (5 + 9)}{3} \Rightarrow V = 672\pi \text{ cm}^3.$$

$A = A_{\ell_1} + A_{\ell_2}$

Assim, $A = \pi \cdot 12 \cdot (13 + 15) \Rightarrow A = 336\pi$ cm^2.

1038. Sejam *ABC* o triângulo e *e* o eixo que passa pelo baricentro de *ABC* e paralelo a *AC*.

$$x + y = \frac{1}{3}a$$

$$2x + 2y = \frac{2}{3}a$$

$$V_1 + V_2 = \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot 2x - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot 2x + \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot 2y - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot 2y$$

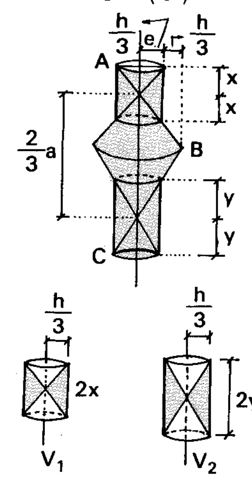
$$V_1 + V_2 = \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \left[(2x + 2y) - \frac{1}{3}(2x + 2y)\right]$$

$$V_1 + V_2 = \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3}\right)$$

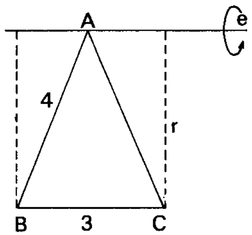
$$V_1 + V_2 = \frac{4}{81}\pi h^2 a$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{3}\right)^2 \cdot \frac{2a}{3} \Rightarrow V_3 = \frac{8}{81}\pi h^2 a$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow V = \frac{4}{27}h^2 a\pi$$



1040.



$r^2 = 4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{55}}{2}$ cm

$V = V_{cilindro} - V_{cone}$

Cilindro: altura = 3 cm;

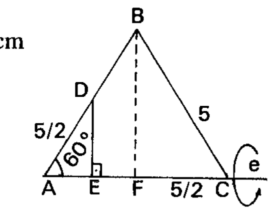
raio da base = $r = \frac{\sqrt{55}}{2}$ cm

Cone: altura = $\frac{3}{2}$ cm;

raio da base = $r = \frac{\sqrt{55}}{2}$ cm

Então: $V = \pi\left(\frac{\sqrt{55}}{2}\right)^2 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{55}}{2}\right)^2 \frac{3}{2} \Rightarrow V = \frac{55\pi}{2}$ cm³.

1052. No ΔADE: $\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{AE}{\frac{5}{2}} \Rightarrow AE = EF = \dfrac{5}{4} \text{ cm} \\ \text{sen } 60° = \dfrac{DE}{\frac{5}{2}} \Rightarrow DE = \dfrac{5\sqrt{3}}{4} \text{ cm} \end{cases}$



$V = V_{tronco} + V_{cone}$

tronco do cone: $h = EF = \frac{5}{4}$ cm; $r = DE = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ cm; $R = BF = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

cone: altura $= \frac{5}{2}$ cm; raio $= R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

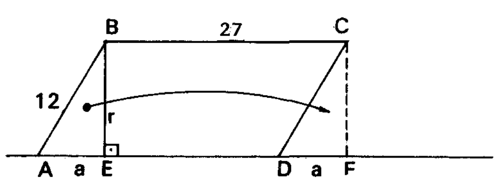
Então:

$$V = \frac{\pi \cdot \frac{5}{4}}{3}\left[\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2\right] + \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{525}{16} + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{375}{8} = \frac{875\pi}{64} + \frac{125\pi}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1\,875\pi}{64} \text{ cm}^3.$$

1061. Os volumes dos sólidos gerados pelos triângulos *ABE* e *DCF* são iguais.



No ΔABE: $\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{a}{12} \Rightarrow a = 6 \text{ cm} \\ \text{sen } 60° = \dfrac{r}{12} \Rightarrow r = 6\sqrt{3} \text{ cm} \end{cases}$

$V = V_{cilindro}$

cilindro: $r = 6\sqrt{3}$ cm; $h = AD - a + a = 27$ cm

Então:

$V = \pi(6\sqrt{3})^2 \cdot 27 \Rightarrow V = 2\,916\pi$ cm³.

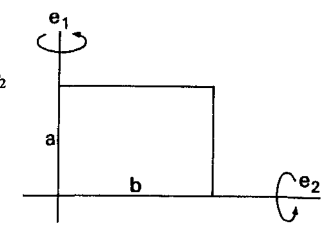
$A = A_{\ell cilindro} + 2A_{\ell cone}$

cone: $r = 6\sqrt{3}$ cm; $g = 12$ cm

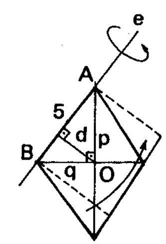
$A = 2\pi \cdot 6\sqrt{3} \cdot 27 + 2 \cdot \pi \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 \Rightarrow A = 468\sqrt{3}\,\pi$ cm²

1062. $A_{\ell cilindro} = 2\pi rh$

$\left.\begin{array}{l} \text{em torno de } e_1\text{: } A_{\ell_1} = 2\pi ba \\ \text{em torno de } e_2\text{: } A_{\ell_2} = 2\pi ab \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\ell_1} = A_{\ell_2}$



1064.



$\frac{q}{p} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = 2q$

No triângulo retângulo *ABO*, temos:

$5^2 = 4q^2 + q^2 \Rightarrow q = \sqrt{5}$ cm e $p = 2\sqrt{5}$ cm

e

$5 \cdot d = p \cdot q \Rightarrow d = 2$ cm.

$S = \frac{2p \cdot 2q}{2} \Rightarrow S = 20$ cm²

Pela fórmula de Pappus-Guldin:

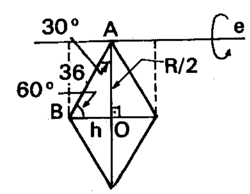
$V = 2\pi Sd$, vem:

$V = 2\pi \cdot 20 \cdot 2 \Rightarrow V = 80\pi$ cm³.

De outro modo:

$V = V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi(2d)^2 \cdot 5 \Rightarrow V = 80\pi$ cm³.

1065.



No triângulo retângulo *ABO*, temos:

$\text{sen } 60° = \frac{\frac{R}{2}}{36} \Rightarrow R = 36\sqrt{3}$ cm

e

$\cos 60° = \frac{h}{36} \Rightarrow h = 18$ cm.

$V = 2(V_{\text{tronco do cone}} - V_{\text{cone}})$

tronco de cone: $R = 36\sqrt{3}$ cm; $r = \dfrac{R}{2} = 18\sqrt{3}$ cm; $h = 18$ cm; $g = 36$ cm.

cone: $r = 18\sqrt{3}$ cm; $h = 18$ cm; $g = 36$ cm.

Então:

$$V = 2\left\{\frac{\pi \cdot 18}{3}\left[(36\sqrt{3})^2 + 36\sqrt{3}\cdot 18\sqrt{3} + (18\sqrt{3})^2\right] - \frac{\pi}{3}(18\sqrt{3})^2\cdot 18\right\} =$$

$$= 2\cdot 6\pi(3\,888 + 1944) \Rightarrow V = 69\,984\pi \text{ cm}^3.$$

$$A = 2(A_{lat_{tronco}} + A_{lat_{cone}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2\cdot[\pi(36\sqrt{3} + 18\sqrt{3})\cdot 36 + \pi\cdot 18\sqrt{3}\cdot 36] =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot 36\cdot 72\sqrt{3} \Rightarrow A = 5\,184\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^2$$

De outro modo:

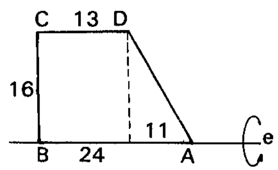
$$V = 2\pi S d \Rightarrow V = 2\pi\cdot\frac{36\sqrt{3}\cdot 36}{2}\cdot 18\sqrt{3} \Rightarrow V = 69\,984\pi \text{ cm}^3$$

$$A = 2\pi\ell d \Rightarrow A = 2\pi\cdot(4\cdot 36)\cdot 18\sqrt{3} \Rightarrow A = 5\,184\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^2.$$

1066. $V = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \pi\cdot 16^2\cdot 13 + \frac{\pi}{3}16^2\cdot 11 \Rightarrow$$

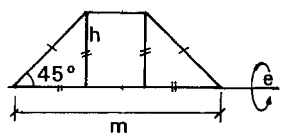
$$\Rightarrow V = \frac{12\,800\pi}{3} \text{ cm}^3$$



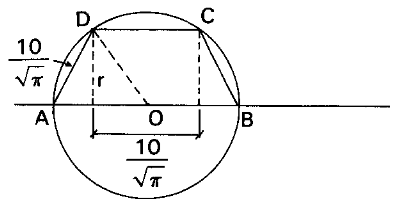
1068. $V = V_{\text{cilindro}} + 2V_{\text{cone}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \pi h^2(m - 2h) + 2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot h^2\cdot h =$$

$$= \pi h^2\left(m - 2h + \frac{2}{3}h\right) \Rightarrow V = \frac{(3m - 4h)\pi h^2}{3}$$



1070.



No Δ equilátero *ADO*: $r = \dfrac{10}{\sqrt{\pi}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$ m.

$A = 2A_{lat_{cone}} + A_{lat_{cilindro}}$

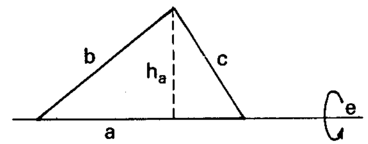
cone: $r = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$ m; $g = \dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$ m

cilindro: $r = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$ m; $h = \dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$ m

Então:

$$A = 2\cdot\pi\cdot\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{10}{\sqrt{\pi}} + 2\pi\cdot\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{10}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow A = 200\sqrt{3} \text{ m}^2.$$

1071.



A área do triângulo é:

$$S = \frac{a\cdot h_a}{2} \text{ e } h_a = \frac{2S}{a}.$$

Giro em torno de *a*:

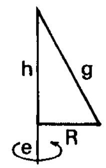
$$V_a = \frac{\pi}{3}\cdot h_a^2\cdot a = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{h_a\cdot a}{2}\cdot h_a = \frac{2\pi}{3}\cdot S\cdot\frac{2S}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{4\pi S^2}{3a} \text{ e } aV_a = \frac{4\pi S^2}{3}.$$

Analogamente, $bV_b = \dfrac{4\pi S^2}{3}$ e $cV_c = \dfrac{4\pi S^2}{3}$.

Assim: $aV_a = bV_b = cV_c$.

1072.



$$\left.\begin{array}{l} A_\Delta = R\cdot\dfrac{L}{2} \Rightarrow h = \dfrac{2A}{R} \\ \text{e} \\ A_t = B = \pi R(g + R) \Rightarrow g = \dfrac{B}{\pi R} - R \\ \text{e} \quad g^2 = h^2 + R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{B}{\pi R} - R\right)^2 = \left(\frac{2A}{R}\right)^2 + R^2 \Rightarrow \frac{B^2}{\pi^2R^2} - \frac{2B}{\pi} = \frac{4A^2}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{B^2 - 4\pi^2A^2}{2\pi B}}$$

Por outro lado,

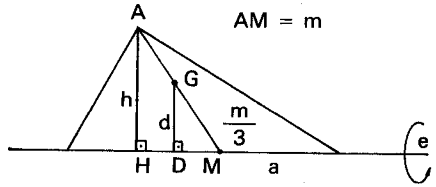
$$g^2 = \left(\frac{2A}{R}\right)^2 + R^2 = \frac{4A^2}{\dfrac{B^2 - 4\pi^2A^2}{2\pi B}} + \frac{B^2 - 4\pi^2A^2}{2\pi B} =$$

$$= \frac{8\pi A^2B}{B^2 - 4\pi^2A^2} + \frac{B^2 - 4\pi^2A^2}{2\pi B} \Rightarrow g = \frac{B^2 + 4\pi^2A^2}{\sqrt{2\pi B(B^2 - 4\pi^2A^2)}}.$$

1073. Notando a semelhança entre os triângulos AHM e GDM: $d = \frac{h}{3}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{ah}{2} \cdot h =$$

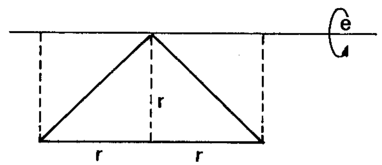
$$= 2\pi \cdot \frac{h}{3} S \Rightarrow V = S \cdot 2\pi d$$



1074. $V_S = V_{cilindro} - 2V_{cone}$

$$V_S = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 = V_{esfera}$$



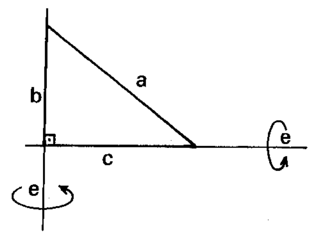
1075. $A_b = \pi \cdot ac$

Multiplicando membro a membro por b: $b \cdot A_b = \pi abc$.

$A_c = \pi \cdot ab$

Multiplicando membro a membro por c: $c \cdot A_c = \pi abc$.

Assim: $bA_b = cA_c$ e $\frac{b}{c} = \frac{A_c}{A_b}$.



1076. $V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b$ e $V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c$

Dividindo membro a membro:

$$\frac{V_b}{V_c} = \frac{c}{b} \Rightarrow bV_b = cV_c.$$

1077. $V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b$; $V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c$; $V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 a$

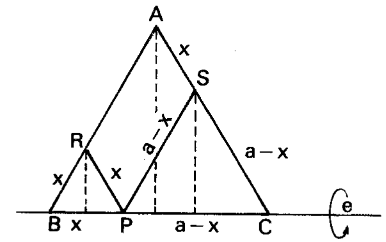
Partindo do 2º membro e fazendo as substituições, chegamos ao 1º membro.

$$\frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}\pi^2 c^4 b^2} + \frac{1}{\frac{1}{9}\pi^2 b^4 c^2} =$$

$$= \frac{9b^2 + 9c^2}{\pi^2 b^4 c^4} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4} = \left(\frac{3a}{\pi b^2 c^2}\right)^2 = \left(\frac{3a}{\pi a^2 h^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{\pi a h^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{V_a}\right)^2 = \frac{1}{V_a^2} \quad \text{(1º membro)}$$

1078.



Para que $V_{PRAS} = \frac{2}{3} V_{ABC}$ basta que $V_{BPR} + V_{CPS} = \frac{1}{3} V_{ABC}$.

Mas $V_{BPR} + V_{CPS} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot x + \frac{1}{3}\pi\left[\frac{(a - x)\sqrt{3}}{2}\right]^2 \cdot (a - x) =$

$$= \frac{\pi}{4}(a^3 - 3a^2x + 3ax^2).$$

Temos ainda $V_{ABC} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi}{4}a^3$.

Assim: $\frac{\pi}{4}(a^3 - 3a^2x + 3ax^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} a^3 \Rightarrow$

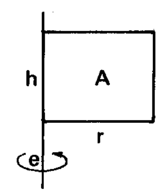
$$\Rightarrow 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = \frac{a^3}{3}.$$

Resolvendo a equação do 2º grau em x, temos:

$x = \frac{2a}{3}$ ou $x = \frac{a}{3}$.

Então: $x = PB = \frac{a}{3}$ ou $x = PB = \frac{2a}{3}$.

1082.



$$\left.\begin{matrix} A = r \cdot h \\ B = \pi r^2 h \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = \pi A r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{B}{\pi A}$$

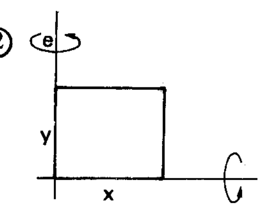
1083. Giro em torno de y: $V = \pi x y^2$ (1)

Giro em torno de x: $V' = \pi x^2 y \Rightarrow y = \frac{V'}{\pi x^2}$ (2)

Substituindo em (1):

$$V = \pi x \frac{V'^2}{\pi^2 x^4} \Rightarrow V = \frac{V'^2}{\pi x^3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V'^2}{\pi V}}$$

Substituindo em (2):



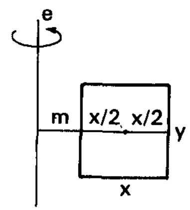
$$y = \frac{V'}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{V'^4}{\pi^2V^2}}} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi V'}}.$$

1084. $V = \pi(x + m)^2 \cdot y - \pi m^2 y =$

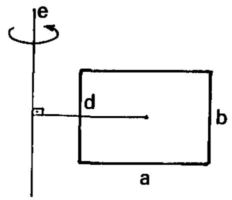
$= \pi y(x^2 + 2mx) =$

$= 2\pi\dfrac{x^2y}{2} + 2\pi mxy =$

$= 2\pi\left(\dfrac{x}{2} + m\right)xy = 2\pi dS$



1086.



Volume: $V = 2\pi abd$ (ver exercício *1084.*)

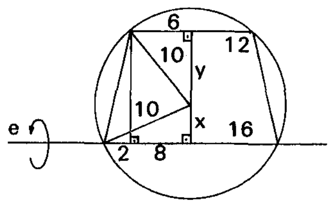
Área: $A = A_{lat_{int.}} + A_{lat_{ext.}} + 2A_{coroa} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 2\pi b\left(a + \dfrac{a}{2}\right) + 2\pi b\left(d - \dfrac{a}{2}\right) + 2\pi\left[\left(d + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(d - \dfrac{a}{2}\right)^2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 2\pi(bd + bd + ad + ad) \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 4\pi d(a + b)$

1088.



$$\left.\begin{aligned} x^2 = 10^2 - 8^2 &\Rightarrow x = 6 \text{ cm} \\ y^2 = 10^2 - 6^2 &\Rightarrow y = 8 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow r = x + y \Rightarrow r = 14$ cm

$V_{sólido} = V_{cilindro} + 2V_{cone}$

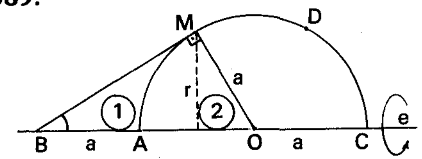
$V_{sólido} = \pi \cdot 14^2 \cdot 12 + 2 \cdot \dfrac{1}{3}\pi \cdot 14^2 \cdot 2 \Rightarrow V_{sólido} = \dfrac{7\,840\pi}{3}$ cm^3

$A_{trap.} = \dfrac{16 + 12}{2} \cdot 14 \Rightarrow A_{trap.} = 196$ cm$^2 \Rightarrow A_{quad.} = 196$ cm$^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell_{quad.} = 14$ cm

$V_{cilindro} = \pi \cdot 14^2 \cdot 14 \Rightarrow V_{cilindro} = 2\,744\pi$ cm^3

1089.



No triângulo retângulo *BMO*:

$\text{sen } M\hat{B}C = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M\hat{B}C = 30°$

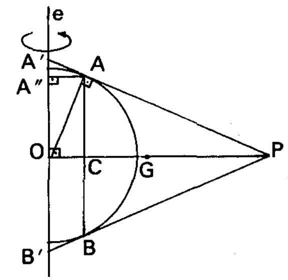
$\overline{BM}^2 = (2a)^2 - a^2 \Rightarrow \overline{BM} = a\sqrt{3}$

$2a \cdot r = a \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$A = A_{lat_1} + A_{lat_2} \Rightarrow A = \pi \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}(a\sqrt{3} + a) \Rightarrow A = \dfrac{(3 + \sqrt{3}) \cdot \pi \cdot a^2}{2}$

$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 2a \Rightarrow V = \dfrac{\pi a^3}{2}$

1091.



No triângulo retângulo *PAO*:

$\overline{PA}^2 = 50^2 - 20^2 \Rightarrow \overline{PA} = 10\sqrt{21}$ cm.

Os triângulos *PCA*, *PAO*, *POA'* e *AA"A'* são semelhantes. Assim:

$\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PO}} \Rightarrow \dfrac{\overline{PC}}{10\sqrt{21}} = \dfrac{10\sqrt{21}}{50} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{PC} = 42$ cm e $\overline{OC} = 50 - 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{OC} = AA'' = 8$ cm

$\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PO}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \Rightarrow \dfrac{10\sqrt{21}}{50} = \dfrac{20}{\overline{OA'}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{OA'} = \dfrac{100}{\sqrt{21}}$ cm

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PO}} \Rightarrow \dfrac{\overline{AC}}{20} = \dfrac{10\sqrt{21}}{50} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{OA''} = 4\sqrt{21}$ cm

$\dfrac{\overline{AA''}}{\overline{PO}} = \dfrac{\overline{A'A''}}{\overline{OA'}} \Rightarrow \dfrac{8}{50} = \dfrac{\overline{A'A''}}{\dfrac{100}{\sqrt{21}}} \Rightarrow \overline{A'A''} = \dfrac{16}{\sqrt{21}}$ cm

$V = 2(V_{cone_{PA'O}} - V_{cilindro_{OCAA''}} - V_{cone_{AA'A''}}) =$

$= 2\left(\dfrac{\pi}{3} \cdot 50^2 \cdot \dfrac{100}{\sqrt{21}} - \pi \cdot 8^2 \cdot 4\sqrt{21} - \dfrac{\pi}{3} \cdot 8^2 \cdot \dfrac{16}{\sqrt{21}}\right) =$

$= \dfrac{2\pi \cdot 232\,848}{3\sqrt{21}} \Rightarrow V = 7\,392\sqrt{21}\,\pi$ cm^3

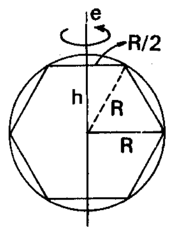
De outro modo, usando a fórmula de Pappus-Guldin: $V = 2\pi Sd$, em que

$S = \dfrac{2\overline{AC} \cdot \overline{PC}}{2} = 4\sqrt{21} \cdot 42 = 168\sqrt{21}$ cm^2

e $d = \overline{OG} = \overline{OC} + \dfrac{\overline{PC}}{3} = 8 + 14 = 22$ cm.

Vem: $V = 2\pi \cdot 168\sqrt{21} \cdot 22 \Rightarrow V = 7\,392\sqrt{21}\,\pi$ cm^3.

1092.



$$h^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{sólido} + 2V_{tronco} =$$

$$= 2\,\frac{\pi \cdot R\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}\left[R^2 + R\cdot\frac{R}{2} + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi R\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{7R^2}{4} \Rightarrow V_{sólido} = \frac{7\pi\sqrt{3}}{12}R^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Então: $\frac{V_{esfera}}{V_{sólido}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{7}{12}\pi\sqrt{3}\,R^3} \Rightarrow \frac{V_{esfera}}{V_{sólido}} = \frac{16\sqrt{3}}{21}$.

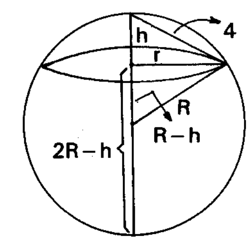
Capítulo XVI — Inscrição e circunscrição de sólidos

1103. $\left.\begin{array}{l} d = 3\text{ cm} \\ \frac{A_{c_1}}{A_{c_2}} = \frac{3}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\pi R(R-3)}{2\pi R(R+3)} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3R + 9 = 5R - 15 \Rightarrow R = 12\text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\cdot 12^3 \Rightarrow V_{esfera} = 2\,304\pi\text{ cm}^3$

1105. $\frac{A_{c_1}}{A_{c_2}} = \frac{2}{5}$



$\left.\begin{array}{l} r^2 + h^2 = 4^2 \\ r^2 + (R-h)^2 = R^2\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 + R^2 - 2Rh + h^2 = R^2 \Rightarrow$

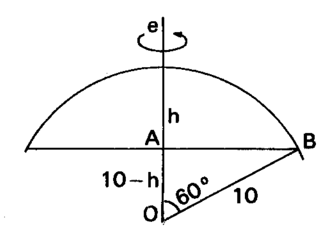
$\Rightarrow Rh = 8$

$\frac{\cancel{2\pi}Rh}{\cancel{2\pi}R(2R-h)} = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8}{2R^2 - 8} = \frac{2}{5} \Rightarrow R^2 = 14$

$A_{sup.esf.} = 4\pi R^2 \Rightarrow A_{sup.esf.} = 56\pi\text{ cm}^2$

1106. $R = 10$ cm



No ΔOAB:

$\cos 60° = \frac{10-h}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 5$ cm

$A_{cal.} = 2\pi\cdot 10\cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{cal.} = 100\pi\text{ cm}^2$

1107. a: aresta do cubo inscrito na esfera

$R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

$h_1 = R - \frac{a}{2} = R - \frac{R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}R$

$h_2 = R + \frac{a}{2} \Rightarrow h_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}R$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\pi R\cdot R\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{2\pi R\cdot R\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} : \frac{3+\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 2 - \sqrt{3}$$

1108. $A_2 - A_1 = A_{circ.} \Rightarrow 2\pi R(2R - h) - 2\pi Rh = \pi r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4R^2 - 2Rh - 2Rh = r^2 \Rightarrow r^2 = 4R(R - h) = 4R^2 - 4Rh$
Mas $r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$.
Igualando:
$4R^2 - 4Rh = 2Rh - h^2 \Rightarrow h_2 - 6Rh + 4R^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = R\,(3 + \sqrt{5}\,) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ h = R(3 - \sqrt{5}\,) \end{cases}$$

Vem: $R - h = R - R(3 - \sqrt{5}\,) = R(1 - 3 + \sqrt{5}\,)$.
Assim, $R - h = (\sqrt{5} - 2)R$.

1109. $A_2^2 = A_1 \cdot A_{sup.\ esf.} \Rightarrow [\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{r}(2r - h)]^2 = (2\cancel{\pi}rh) \cdot (\cancel{4}\cancel{\pi}\cancel{r^2}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (2r - h)^2 = 2rh \Rightarrow h^2 - 6rh + 4r^2 = 0 \Rightarrow$

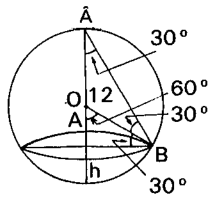
$$\Rightarrow \begin{cases} h = r\,(3 + \sqrt{5}\,) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ h = r(3 - \sqrt{5}\,) \end{cases}$$

Vem: $r - h = r - r(3 - \sqrt{5}\,) = r(1 - 3 + \sqrt{5}\,)$.
Assim, $r - h = (\sqrt{5} - 2)r$.

1110. $R = 12$ cm
No ΔOAB:

$$\text{sen } 30° = \frac{12 - h}{12} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h = 6$ cm
$A = 2\pi \cdot 12 \cdot 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 144\pi \text{ cm}^2$

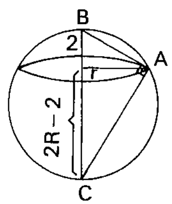


1111. $\left.\begin{array}{l} h_{calota} = 2 \text{ m} \\ A_{calota} = 3A_{\ell_{cone}} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\pi \cdot R \cdot 2 = 3\pi rR \Rightarrow r = \dfrac{4}{3}$ m

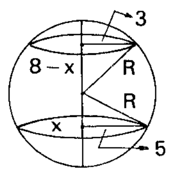
No triângulo retângulo *ABC*:
$r^2 = 2 \cdot (2R - 2) \Rightarrow r^2 = 4(R - 1) \Rightarrow$

$4(R - 1) = \dfrac{16}{9} \Rightarrow R - 1 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow R = \dfrac{13}{9}$ m



1113. $h = 8$ cm
$r_1 = 3$ cm
$r_2 = 5$ cm

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = (8 - x)^2 + 3^2 \\ \quad e \\ R^2 = x^2 + 5^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$\Rightarrow (8 - x)^2 + 9 = x^2 + 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow 64 - 16x + \cancel{x^2} + 9 = \cancel{x^2} + 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow 16x = 48 \Rightarrow x = 3 \text{ cm} \Rightarrow$
$\Rightarrow R^2 = 25 + 9 \Rightarrow R = \sqrt{34}$ cm
$A_{zona} = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot \sqrt{34} \cdot 8 \Rightarrow A_{zona} = 16\sqrt{34}\,\pi \text{ cm}^2$

1114. $\left.\begin{array}{l} h = 5 \text{ cm; } \alpha = 45° = \dfrac{360°}{8} \\ A_{zona} = A_{fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\pi R \cdot 5 = \dfrac{1}{8}\, 4\pi R^2 \Rightarrow R = 20 \text{ cm} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} V = \dfrac{4}{3}\,\pi \cdot 20^3 \Rightarrow V = \dfrac{32\,000\pi}{3} \text{ cm}^3 \\ e \\ A = 4\pi \cdot 20^2 \Rightarrow A = 1\,600\pi \text{ cm}^2 \end{cases}$$

1115. $\left.\begin{array}{l} h = 5 \text{ cm; } \alpha = 60° = \dfrac{360°}{6} \\ A_{sup.\ esf.} - A_{zona} = A_{fuso} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cancel{\pi}R^{\cancel{2}} - 2\cancel{\pi}\cancel{R} \cdot 5 = \dfrac{1}{6} \cdot 4\cancel{\pi}R^{\cancel{2}} \Rightarrow 4R - 10 = \dfrac{2}{3}\,R \Rightarrow R = 3$ cm

1116. $\left.\begin{array}{l} \alpha = 60° = \dfrac{360°}{6} \\ h = 8 \text{ cm} \\ A_{fuso} + A_{zona} = \dfrac{3}{2}\,A_{sup.\ esf.} \end{array}\right\} \Rightarrow$

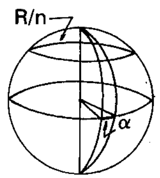
$\dfrac{4\cancel{\pi}R^{\cancel{2}}}{6} + 2\cancel{\pi}\cancel{R} \cdot 8 = \dfrac{3}{2} \cdot 4\cancel{\pi}R^{\cancel{2}} \Rightarrow \dfrac{2R}{3} + 16 = 6R \Rightarrow R = 3$ cm

$V = \dfrac{4}{3}\,\pi \cdot 3^3 \Rightarrow V = 36\pi \text{ cm}^3$

1117. $A_{zona} = A_{fuso} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\pi R\dfrac{R}{n} = \dfrac{\alpha}{2\pi}\,4\pi R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{n}$ rad.



1118. $\left.\begin{array}{l} h = 2d \\ A_{zona} = 2 \cdot A_{circulo} \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{2}\cancel{\pi}r \cdot 2d = \cancel{2}\cancel{\pi}R^2 \Rightarrow R^2 = 2rd$
Mas $R^2 = r^2 - d^2$.

Igualando, vem: $r^2 - d^2 = 2rd \Rightarrow d^2 + 2rd - r^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = r(-1 - \sqrt{2}) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = r(-1 + \sqrt{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow 2d = (\sqrt{2} - 1) \cdot 2r$$

1119. $\left.\begin{array}{l} R = 10 \text{ cm} \\ A_{zona} = A_{\ell_{cone}} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi \cdot 10 \cdot (10 - d) = \pi \cdot r \cdot 10 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow r = 20 - 2d \Rightarrow r^2 = 400 - 80d + d^2 \\ \text{Mas } r^2 = 100 - d^2. \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 400 - 80d + d^2 = 100 - d^2 \Rightarrow 2d^2 - 80d + 300 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d^2 - 40d + 150 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 5(4 + \sqrt{10}) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = 5(4 - \sqrt{10}) \end{array}\right.$$

Assim, $d = 5(4 - \sqrt{10})$ cm.

1120. $A_{\ell_{cone}} = \frac{1}{5} \cdot A_{zona} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \cancel{\pi} \cdot R \cdot g = \frac{1}{5} 2\cancel{\pi} rh \Rightarrow 5Rg = 2rh \\ (h - r)^2 + R^2 = r^2 \Rightarrow h^2 - 2rh + r^2 + R^2 = r^2 \Rightarrow h^2 - 2rh + R^2 = 0 \\ g^2 = h^2 + R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

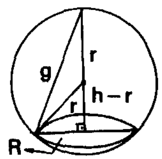
$$\Rightarrow g^2 = 2rh \Rightarrow g^2 = 5Rg \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g = 0 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ g = 5R \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (5R)^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow h = 2R\sqrt{6}$

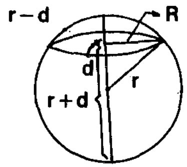
$$\text{Como } h = \frac{5Rg}{2r}, \text{ vem } 2R\sqrt{6} = \frac{5R \cdot 5R}{2r} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5 = 0 \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ R = 4\sqrt{6}r/25 \end{array}\right.$$

Assim, $h = 2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{6} \frac{r}{25} = \frac{48r}{25}$.

Logo, $h - r = \frac{48}{25} r - r \Rightarrow h - r = \frac{23r}{25}$.



1121. $A_{zona} = A_{sup.\ esf.} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\pi r(r \pm d) = 4\pi(3d)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow r(r \pm d) = 18d^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 18d^2 \pm rd - r^2 = 0 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = \frac{-1 + \sqrt{73}}{36} r \\ \text{ou} \\ d = \frac{-1 - \sqrt{73}}{36} r \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = \frac{1 + \sqrt{73}}{36} r \\ \text{ou} \\ d = \frac{1 - \sqrt{73}}{36} r \text{ (não convém)} \end{array}\right.$$

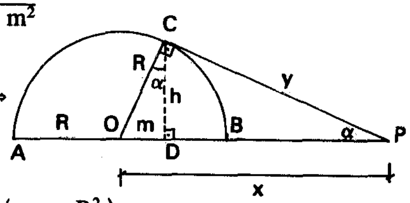
Assim, $d = \frac{1 + \sqrt{73}}{36} r$ ou $d = \frac{-1 + \sqrt{73}}{36} r$.

1122. $A_{zona} = A_{circ.máx.} + A_{secção} \Rightarrow 2\pi rd = \pi r^2 + \pi R^2 \Rightarrow 2rd = r^2 + R^2$
Mas $R^2 = r^2 - d^2$.
Assim, $2rd = r^2 + r^2 - d^2 \Rightarrow d^2 + 2r \cdot d - 2r^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = r(-1 - \sqrt{3}) \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ d = r(-1 + \sqrt{3}) \end{array}\right.$$

Logo, $d = (\sqrt{3} - 1)r$.

1123. $A_{\ell_{cone}} = A_{calota} \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi \cdot h \cdot y = 2\pi R(R + m) \Rightarrow$
$\Rightarrow hy = 2R(R + m)$
Mas $h^2 = R^2 - m^2 \Rightarrow h = \sqrt{R^2 - m^2}$
e $y^2 = x^2 - R^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - R^2}$.
Por outro lado, $\text{sen}\ \alpha = \frac{R}{x} = \frac{m}{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow m = \frac{R^2}{x} \Rightarrow m^2 = \frac{R^4}{x^2}$.



Assim, $\sqrt{R^2 - \frac{R^4}{x^2}} \cdot \sqrt{x^2 - R^2} = 2R\left(R + \frac{R^2}{x}\right) \Rightarrow$

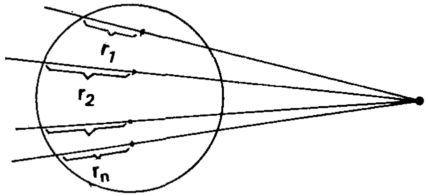
$\Rightarrow \frac{R}{x}\sqrt{x^2 - R^2} \cdot \sqrt{x^2 - R^2} = \frac{2R^2}{x}(x + R) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - R^2 = 2R(x + R) \Rightarrow x^2 - 2Rx - 3R^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -R \text{ (não convém)} \\ \text{ou} \\ x = 3R \end{array}\right.$$

Logo, $x = \overline{OP} = 3R$.

1124.



$S = 4\pi R^2 + 2\pi(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)$.
Dividindo ambos os membros da igualdade por $2\pi R^2$, temos:

$$\frac{S}{2\pi R^2} = 2 + \frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S}{2\pi R^2} - 2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{R^2}$$

Mas $r_1^2 \leqslant R^2, r_2^2 \leqslant R^2, \ldots, r_n^2 \leqslant R^2$.

Assim, $r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 \leqslant NR^2$ e $\dfrac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{R^2} \leqslant N$.

Temos, portanto: $\dfrac{S}{2\pi R^2} - 2 \leqslant N$.

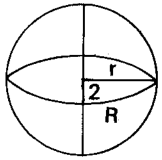
Obs.: Caso a reta comum do feixe seja secante à esfera, teremos $N = 1$, e a desigualdade se verifica.

1127. $\left.\begin{array}{l} A_{calota} = 100\pi \text{ cm}^2 \\ R = \dfrac{20}{2} = 10 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi \cdot 10h = 100\pi \Rightarrow h = 5 \text{ cm}$

Mas $r^2 = 10^2 - (10 - 5)^2 \Rightarrow r^2 = 75$.

Logo, $V = \dfrac{\pi \cdot 5}{6}(3 \cdot 75 + 25) \Rightarrow V = \dfrac{625\pi}{3} \text{ cm}^3$.

1128. $R = 10$ cm
$(d = R - h = 2$ ou $d = 2R - h) \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 8$ cm ou $h = 12$ cm
Ainda, $r^2 = 100 - 4 = 96$.



Assim, $V = \dfrac{\pi \cdot 8}{6}(3 \cdot 96 + 64)$ ou

$V = \dfrac{\pi \cdot 12}{6}(3 \cdot 96 + 144)$.

Logo, $V = \dfrac{1\,408\pi}{3} \text{ cm}^3$ ou $V = 864\pi \text{ cm}^3$.

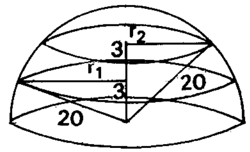
1129. $h = 4$ cm

$r_1 = r_2 = \dfrac{8}{2} = 4$ cm

$V = \dfrac{\pi \cdot 4}{6} \cdot [3(4^2 + 4^2) + 4^2] = \dfrac{2\pi}{3} \cdot (96 + 16) \Rightarrow V = \dfrac{224\pi}{3} \text{ cm}^3$

1131. $R = 20$ cm
$h = 6 - 3 = 3$ cm

$r_1^2 = 20^2 - 3^2 \Rightarrow r_1^2 = 391$
$r_2^2 = 20^2 - 6^2 \Rightarrow r_2^2 = 364$

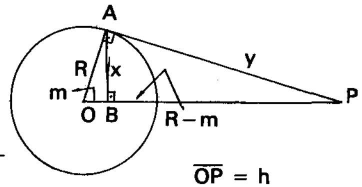


Vem: $V = \dfrac{\pi \cdot 3}{6} \cdot [3 \cdot (391 + 364) + 3^2] = \dfrac{\pi}{2} \cdot 2\,274 \Rightarrow V = 1\,137\pi \text{ cm}^3$.

1132. $R = 15$ cm
$h = 2d = 2 \cdot 6 = 12$ cm
$r^2 = 15^2 - 6^2 \Rightarrow r^2 = 189$
Vem: $V = \dfrac{\pi \cdot 12}{6} \cdot [3(189 + 189) + 12^2] = 2\pi \cdot 1\,278 \Rightarrow V = 2\,556\pi \text{ cm}^3$.

1134. $V_{sólido} = V_{cone} - V_{segmento}$
$\Delta POA \sim \Delta PAB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{h}{y} = \frac{y}{h - m} = \frac{R}{x}$$



$$\text{Cone}\left\{\begin{array}{l} \text{altura: } h - m = \dfrac{y^2}{h} = \dfrac{h^2 - R^2}{h} \\ \text{raio da base: } x = \dfrac{Ry}{h} = \dfrac{R}{h} \cdot \sqrt{h^2 - R^2} \end{array}\right.$$

$$V_{cone} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{R}{h}\sqrt{h^2 - R^2}\right)^2 \cdot \frac{h^2 - R^2}{h} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot (h^2 - R^2) \cdot \frac{h^2 - R^2}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{cone} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{h^3} \cdot (h^2 - R^2)^2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{h^3} \cdot (h - R)^2(h + R)^2$$

$$\begin{array}{l}\text{segmento} \\ \text{esférico}\end{array}\left\{\begin{array}{l} \text{altura: } R - m = h - m + R - h = \dfrac{h^2 - R^2}{h} + R - h = \dfrac{Rh - R^2}{h} \\ \text{raio: } x = \dfrac{R}{h} \cdot \sqrt{h^2 - R^2} \end{array}\right.$$

$$V_{segmento} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{Rh - R^2}{h} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{R}{h} \cdot \sqrt{h^2 - R^2}\right)^2 + \left(\frac{Rh - R^2}{h}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{Rh - R^2}{h} \cdot \left[\frac{3R^2}{h^2} \cdot (h^2 - R^2) + \frac{R^2(h - R)^2}{h^2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{R(h - R)}{h^3}\{(h - R)[3R^2(h + R) + R^2(h - R)]\} =$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{R(h - R)^2}{h^3}(2R^3 + 4R^2h) = \frac{2\pi}{6} \frac{R^3(h - R)^2}{h^3} \cdot (R + 2h) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{h^3} \cdot (h - R)^2 \cdot (R + 2h)$$

$$\text{Então, } V_{\text{sólido}} = \frac{\pi}{3} \frac{R^2}{h^3} (h - R)^2[(h + R)^2 - R(R + 2h)] =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{h^3} \cdot (h - R)^2 \cdot h^2 \Rightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{h} \cdot (h - R)^2.$$

1135. $R = \dfrac{30}{2} = 15 \text{ m}$

$$\left.\begin{array}{l} R = \dfrac{30}{2} = 15 \text{ m} \\ \left.\begin{array}{l} d_1 = 12 \text{ m} \\ d_2 = 8 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow h = 12 - 8 \Rightarrow h = 4 \text{ m} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = 2\pi \cdot 15 \cdot 4 \Rightarrow A = 120\pi \text{ m}^2$

$r_1^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$

$r_2^2 = 15^2 - 8^2 = 225 - 64 = 161$

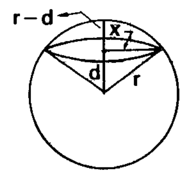
$V = \dfrac{\pi \cdot 4}{6} [3 \cdot (161 + 81) + 16] \Rightarrow V = \dfrac{1\,484\pi}{3} \text{ m}^3$

1136. $V_{\text{cone}} = V_{\text{segmento}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \cdot (r^2 - d^2) \cdot d = \dfrac{\cancel{\pi}}{\cancel{6}} (r - d) [3(r^2 - d^2) + (r - d)^2], \ r \neq d \Rightarrow$

$\Rightarrow (r + d) \cdot d = \dfrac{1}{2} (r - d) [3 (r + d) + r - d] \Rightarrow d^2 + rd - r^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} d = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} r \ \text{(não convém)} \\ \text{ou} \\ d = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} r \end{array} \right.$$



$x^2 = r^2 - d^2$

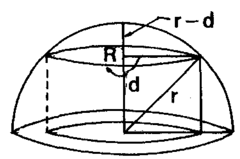
Assim, $d = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} r.$

1137. $V_{\text{segmento}} = V_{\text{cilindro}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{6} \cdot (r - d) [3R^2 + (r - d)^2] = \pi R^2 d \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(r - d)^2}{6} \cdot [3(r + d) + (r - d)] = (r^2 - d^2)d$

$\Rightarrow \dfrac{r - d}{6} (4r + 2d) = rd + d^2 \Rightarrow 2d^2 + 2rd - r^2 = 0 \Rightarrow$



$R^2 = r^2 - d^2$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} d = \dfrac{-\sqrt{3} - 1}{2} r \ \text{(não convém)} \\ \text{ou} \\ d = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} r \end{array} \right.$$

Assim, $d = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} r.$

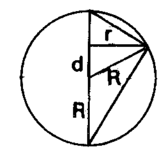
1138. Há duas hipóteses a considerar:

$h_{\text{cone}} = h_{\text{segmento}} = R \pm d = R \pm \sqrt{R^2 - r^2}.$

Temos:

$$\frac{\dfrac{\pi}{3} \cdot r^2(R \pm \sqrt{R^2 - r^2})}{\dfrac{\pi}{6} \cdot (R \pm \sqrt{R^2 - r^2}) \cdot [3r^2 + (R \pm \sqrt{R^2 - r^2})]} = k \Rightarrow$$

k > 0



$d^2 = R^2 - r^2$

$\Rightarrow \dfrac{r^2}{r^2 + R^2 \pm R\sqrt{R^2 - r^2}} = k \Rightarrow$

$\Rightarrow \pm kR\sqrt{R^2 - r^2} = r^2 - kr^2 - kR^2.$

Elevando ao quadrado:

$r^4 \cdot (1 - k)^2 + kR^2(3k - 2)r^2 = 0.$

Dividindo por r^2:

$r^2(1 - k)^2 + kR^2(3k - 2) = 0 \Rightarrow r^2 = \dfrac{k(2 - 3k)}{(1 - k)^2}.$

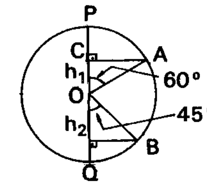
A área da base será: $A = \pi r^2.$

Assim, $A = \dfrac{k(2 - 3k)}{(1 - k)^2} \cdot \pi R^2$, com $k < \dfrac{2}{3}.$

1143. $R = 10$ cm

No ΔAOC: $\cos 60° = \dfrac{h_1}{10} \Rightarrow h_1 = 5$ cm.

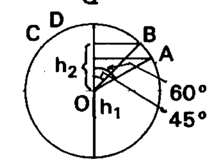
No ΔBOD: $\cos 45° = \dfrac{h_2}{10} \Rightarrow h_2 = 5\sqrt{2}$ cm.



$V = \dfrac{2}{3} \pi \cdot 10^2 \cdot (5\sqrt{2} \pm 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{2}{3} \pi \cdot 100 \cdot 5(\sqrt{2} \pm 1) \Rightarrow$

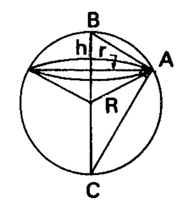
$\Rightarrow V = \dfrac{1\,000}{3} \cdot (\sqrt{2} \pm 1)\pi \text{ cm}^3$



1146. $V_{\text{setor}} = \dfrac{1}{n} V_{\text{esfera}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3} \pi R^2 h = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \dfrac{2R}{n}$



No triângulo retângulo *ABC*:

$r^2 = h \cdot (2R - h) \Rightarrow r^2 = \dfrac{2R}{n}\left(2R - \dfrac{2R}{n}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 4R^2 \cdot \dfrac{n - 1}{n^2} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{n - 1}}{n} \cdot 2R, \ n > 1.$

1147. $V_{anel} = V$

corda: ℓ

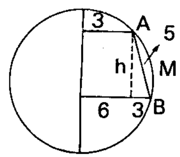
h: projeção da corda sobre o eixo

$$V = \pi \cdot \frac{h}{6} \ell^2 \Rightarrow h = \frac{6V}{\pi \ell^2}$$

1148. $\left.\begin{array}{l} \ell = 5 \text{ cm} \\ h^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow h = 4 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 4}{6} \cdot 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{50\pi}{3} \text{ cm}^3$$

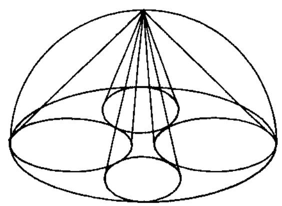


1149. $(2r)^2 + (2r)^2 = (2r + 2x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = r(\sqrt{2} - 1)$

$R = 2r + x \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = \frac{R}{1 + \sqrt{2}}$$



h = R

$V_{sólido} = V_H - 4V_{cone} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{sólido} = \frac{2}{3}\pi R^3 - 4 \cdot \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{1 + \sqrt{2}}\right)^2 \cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{sólido} = \frac{2}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{2}{3 + 2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{sólido} = \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{sólido} = \frac{2}{3}(4\sqrt{2} - 5)\pi R^3$$