GELSON IEZZI

COMPLEMENTO PARA
O PROFESSOR

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA 6 ELEMENTAR

COMPLEXOS POLINÔMIOS EQUAÇÕES

ATUAL EDITORA

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2006.
Av. Marquês de São Vicente, 1697 — Barra Funda
01139-904 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3613-3000
Fax: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Fundamentos de matemática elementar : complemento para o professor. — São Paulo: Atual, 1993.

Conteúdo: v. 1. Conjuntos e funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami. — v. 2. Logaritmos / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Carlos Murakami. — v. 3. Trigonometria / Gelson Iezzi. — v. 4. Seqüências, matrizes, determinantes, sistemas / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan. — v. 5. Combinatória, probabilidade / Samuel Hazzan. — v. 6. Complexos, polinômios, equações — v. 7. Geometria analítica / Gelson Iezzi. — v. 8. Limites, derivadas, noções de integral — Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado. — v. 9. Geometria plana — v. 10. Geometria espacial : posição e métrica / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo.

1. Matemática (2.º grau) 2. Matemática (2.º grau) — Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Iezzi, Gelson, 1939- II. Murakami, Carlos, 1943- III. Dolce, Osvaldo, 1938- IV. Hazzan, Samuel, 1946- V. Machado, Nilson José, 1947- VI. Pompeo, José Nicolau, 1945-

93-1795 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino de 2.º grau 510.7

Complemento para o Professor — Fundamentos de Matemática Elementar 6
Editora: Bárbara Ferreira Arena
Editor de campo: Valdir Montanari
Coordenadora editorial: Sandra Lucia Abrano
Chefe de preparação de texto e revisão: Noé Ribeiro
Coordenadora de revisão: Maria Luiza Xavier Souto
Revisores: Alice Kobayashi
Magna Reimberg Teobaldo
Maria Cecília Fernandes Vannucchi
Maria da Penha Faria
Vera Lúcia Pereira Della Rosa
Editor de arte: Zildo Braz
Chefe de arte: Glair Alonso Arruda
Assistentes de arte: Lu Bevilacqua Ghion
Ricardo Yorio
Rosi Meire Martins Ortega
Gerente de produção: Antonio Cabello Q. Filho
Coordenadora de produção: Silvia Regina E. Almeida
Produção gráfica: José Rogerio L. de Simone
Maurício T. de Moraes
Capa: Ettore Bottini
Foto de capa: Hilton Ribeiro
Consultor técnico: Nobukazu Kagawa
Fotolito: Binhos/H.O. Panaroni
Composição e arte-final: Paika Realizações Gráficas

Visite nosso *site*: www.atualeditora.com.br
Central de atendimento ao professor: (0xx11) 3613-3030

Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 6, Complexos / Polinômios / Equações, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos às sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos ao professor Nobukazu Kagawa a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

Sumário

Capítulo I	— Números complexos	1
Capítulo II	— Polinômios	15
Capítulo III	— Equações polinomiais	31
Capítulo IV	— Transformações	56
Capítulo V	— Raízes múltiplas e raízes comuns	62

Capítulo I — Números complexos

12. $\dfrac{(2+i)^{101}\cdot(2-i)^{50}}{(-2-i)^{100}\cdot(i-2)^{49}} = \dfrac{(2+i)^{100}\cdot(2+i)\cdot(2-i)^{49}\cdot(2-i)}{[-(2+i)]^{100}\cdot[-(2-i)]^{49}} =$

$= \dfrac{(2+i)\cdot(2-i)}{-1} = -5$

13. Temos:
$(1+i)^2 = 2i$, $(1-i)^2 = -2i$, $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$ e $(1-i)^4 = (-2i)^2 = -4$, então $(1+i)^4 = (1-i)^4$.
Se n é um número natural múltiplo de 4, ou seja, se $n = 4p$ com p natural, então:
$(1+i)^n = (1+i)^{4p} = [(1+i)^4]^p = (-4)^p$
$(1-i)^n = (1-i)^{4p} = [(1-i)^4]^p = (-4)^p$
e daí $(1+i)^n = (1-i)^n$.
Se n é um número natural não divisível por 4, chamemos de p o quociente da divisão de n por 4. O resto da divisão pode ser 1 ou 2 ou 3. Examinemos cada caso:

1º) $n = 4p + 1$
$(1+i)^n = (1+i)^{4p+1} = (1+i)^{4p}(1+i) = (1+i)(-4)^p$
$(1-i)^n = (1-i)^{4p+1} = (1-i)^{4p}(1-i) = (1-i)(-4)^p$

2º) $n = 4p + 2$
$(1+i)^n = (1+i)^{4p+2} = (1+i)^{4p}(1+i)^2 = 2i(-4)^p$
$(1-i)^n = (1-i)^{4p+2} = (1-i)^{4p}(1-i)^2 = -2i(-4)^p$

3º) $n = 4p + 3$
$(1+i)^n = (1+i)^{4p+3} = (1+i)^{4p}(1+i)^3 = (-2+2i)(-4)^p$
$(1-i)^n = (1-i)^{4p+3} = (1-i)^{4p}(1-i)^3 = (-2-2i)(-4)^p$

Portanto a igualdade $(1+i)^n = (1-i)^n$ só se verifica quando n é divisível por 4.

16. $\begin{matrix} x = a + ib \\ y = c + id \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + yi = (a-d) + (b+c)i = i & \text{(I)} \\ xi + y = (-b+c) + (a+d)i = 2i - 1 & \text{(II)} \end{cases}$

de (I) temos: $\begin{cases} a = d \\ b + c = 1 \end{cases}$

de (II) temos: $\begin{cases} -b + c = -1 \\ a + d = 2 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas de equações, temos: $a = d = b = 1$ e $c = 0$. Portanto, $x = 1 + i$ e $y = i$.

17. $z = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
$Im(z) = 0 \Rightarrow ad + bc = 0$

18. $z = (a + bi)^4 = (a^4 + b^4 - 6a^2b^2) + 4ab(a^2 - b^2)i$
$Re(z) < 0 \Rightarrow a^4 + b^4 - 6a^2b^2 < 0$ (I)
$Im(z) = 0 \Rightarrow 4ab(a^2 - b^2) = 0$ (II)
De (II) vem $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a^2 - b^2 = 0$.
Se $a = 0$, de (I) vem $b^4 < 0$. (impossível)
Se $b = 0$, de (I) vem $a^4 < 0$. (impossível)
Se $a^2 = b^2 = k$, de (I) vem $k^2 + k^2 - 6k^2 < 0$, que é satisfeita para todo k.
Conclusão: devemos ter $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a^2 = b^2$ ou, resumidamente, $ab \neq 0$ e $a = \pm b$.

24. $u, v \in C, u^2 - v^2 = 6$ e $\bar{u} + \bar{v} = 1 - i$

$$\begin{matrix} u = a + ib \\ v = c + id \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} u + v = (a + c) + (b + d)i \\ \bar{u} + \bar{v} = \overline{u + v} = (a + c) - (b + d)i \end{cases}$$

Então: $\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 1 \end{cases}$

$$u - v = (u - v) \cdot \frac{u + v}{u + v} = \frac{u^2 - v^2}{u + v} = \frac{6}{u + v} \cdot \frac{\overline{u + v}}{\overline{u + v}} =$$

$$= \frac{6(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = 3 - 3i.$$

26. $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^n = \left[\frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}\right]^n = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = (i)^n$

Portanto, $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^n$ pode assumir os valores i, $-i$, 1 e -1.

28. $u = x + iy$ e $v = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z = v \cdot \bar{u} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - iy) = \left(\frac{x}{2} - y\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{y}{2} + x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

Então: $Re(z) = \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{3}}{2}$.

29. $z = x + yi$ e $x^2 + y^2 \neq 0$

$$u = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{(z^2 + 1)\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{(x^2 + y^2 + 1)x}{x^2 + y^2} + \frac{(x^2 + y^2 - 1)y}{x^2 + y^2} \cdot i$$

$Im(u) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$

30. $z_1, z_2 \in C$, $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$ são ambos reais.

$$\begin{matrix} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} u = z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \\ v = z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{cases}$$

Como
$Im(u) = 0 \Rightarrow b = -d$
$Im(v) = 0 \Rightarrow ad = -bc$ e, resolvendo o sistema, temos:
ou $b = d = 0$ e a e c quaisquer
ou $b = -d \neq 0$ e $a = c$
Na 1ª solução, z_1 e z_2 são reais. Na 2ª solução, z_1 é o conjugado de z_2.

31. $z = \frac{2 - xi}{1 + 2xi} = \frac{(2 - xi)(1 - 2xi)}{(1 + 2xi)(1 - 2xi)} = \frac{2 - 2x^2}{1 + 4x^2} - \frac{5x}{1 + 4x^2} \cdot i$

$Re(z) = 0 \Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

32. $z = \frac{1 + 2i}{2 + ai} = \frac{(1 + 2i)(2 - ai)}{(2 + ai)(2 - ai)} = \frac{2 + 2a}{4 + a^2} + \frac{4 - a}{4 + a^2} \cdot i$

$Im(z) = 0 \Rightarrow a = 4$

33. $z = 5 + 8i$ e $z' = 1 + i$
$z_1 = x + iy$
I) $u = z \cdot z_1 = (5x - 8y) + (8x + 5y)i$
$Im(u) = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{8}y$

II) $v = \frac{z_1}{z'} = \frac{x + y}{2} + \frac{-x + y}{2} \cdot i$
$Re(v) = 0 \Rightarrow x = -y$
$Im(v) \neq 0 \Rightarrow x \neq y$
de (I) e (II) temos: $x = y = 0$, o que é impossível.

34. $z = x + yi$, então:

$$\frac{z}{1 - i} + \frac{z - 1}{1 + i} = \frac{2x - 1}{2} + i \cdot \frac{2y + 1}{2} = \frac{5}{2} + i \cdot \frac{5}{2}$$

$$\left.\begin{matrix} 2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3 \\ 2y + 1 = 5 \Rightarrow y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = 3 + 2i$$

36. $z = x + iy$ e $u = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_1 = u \cdot \bar{z} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (x - iy) = \frac{x - y\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot x + y}{2} \cdot i$$

Então:

$R(z_1) = \frac{x - y\sqrt{3}}{2}$

$Im(z_1) = -\frac{\sqrt{3} \cdot x + y}{2}$.

37. Demonstração pelo princípio da indução finita.

Para $n = 0$, temos $\overline{z^0} = \overline{1} = 1 = (\overline{z})^0$.

Suponhamos $\overline{z^p} = (\overline{z})^p$ com $p \in \mathbb{N}$ e provemos que $\overline{z^{p+1}} \doteq (\overline{z})^{p+1}$:

$$\overline{z^{p+1}} = \overline{z^p \cdot z} \overset{(1)}{=} \overline{z^p} \cdot \overline{z} \overset{(2)}{=} (\overline{z})^p \cdot \overline{z} = (\overline{z})^{p+1}.$$

A passagem (1) é justificada pelo teorema do item 15 e a (2), pela hipótese de indução.

38. $x^2 + (a + bi)x + (c + di) = 0$ admite uma raiz real.

Seja α a raiz real. Temos:

$\alpha^2 + (a + bi)\alpha + (c + di) = 0$

$(\alpha^2 + a\alpha + c) + (b\alpha + d)i = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + c = 0 \\ b\alpha + d = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{d}{b} \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{d}{b}\right)^2 + a\left(-\frac{d}{b}\right) + c = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2}{b^2} - \frac{ad}{b} + c = 0 \Rightarrow adb = d^2 + b^2c.$$

40. $z = a + ib$ e $\overline{z} = a - ib$

$z^3 = \overline{z} \Rightarrow (a + ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = a - ib$

Então:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = a \Rightarrow a(a^2 - 3b - 1) = 0 \\ 3a^2b - b^3 = -b \Rightarrow b(3a^2 - b^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

I) Se $a = 0 \Rightarrow b = \pm 1$ e $z = i$ ou $z = -1$.

II) Se $b = 0 \Rightarrow a = \pm 1$ e $z = 1$ ou $z = -1$.

III) Se $a = b = 0 \Rightarrow z = 0$.

Portanto, $z = 0$ ou $z = i$ ou $z = -i$ ou $z = 1$ ou $z = -1$.

41. $\begin{array}{l} z^2 = i \\ z = a + bi \end{array} \Rightarrow z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = i$

Então:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$ e, resolvendo o sistema, temos:

I) Se $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

II) Se $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

42. $\begin{array}{l} z^2 = 1 + i\sqrt{3} \\ z = x + yi \end{array} \Rightarrow z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = 1 + i\sqrt{3}$

Então

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \sqrt{3} \end{cases}$$ e, resolvendo o sistema, temos:

I) Se $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

II) Se $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

43. $x^2 + y^2 = 1$ (I) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 1$ (II)

$$\frac{1 + x + iy}{1 + x - iy} = \frac{(1 + x) + iy}{(1 + x) - iy} \cdot \frac{(1 + x) + iy}{(1 + x) + iy} =$$

$$= \frac{[(1 + x)^2 - y^2] + 2(1 + x)yi}{(1 + x)^2 + y^2} =$$

$$\overset{(II)}{=} \frac{[1 + 2x + x^2 + (x^2 - 1)] + 2(1 + x)yi}{1 + 2x + (x^2 + y^2)} =$$

$$\overset{(I)}{=} \frac{2x(1 + x) + 2(1 + x)yi}{1 + 2x + 1} =$$

$$= \frac{2x(1 + x) + 2(1 + x)yi}{2(1 + x)}$$

$$= x + iy$$

44. $$f(x) = \frac{1 + \text{sen } x + i \cdot \cos x}{1 - \text{sen } x - i \cdot \cos x} = \frac{1 + \text{sen } x + i \cdot \cos x}{1 - \text{sen } x - i \cdot \cos x} \cdot \frac{1 - \text{sen } x + i \cdot \cos x}{1 - \text{sen } x + i \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{[(1 + \text{sen } x)(1 - \text{sen } x) + \cos^2 x] - [1 + \text{sen } x + 1 - \text{sen } x] \cdot \cos x \cdot i}{(1 - \text{sen } x)^2 + \cos^2 x} =$$

$$= \frac{i \cdot \cos x}{(1 - \text{sen } x)} = h(x)$$

$$g(x) = (\text{tg } x + \sec x)i = \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}\right)i = \frac{(\text{sen } x + 1)i}{\cos x} =$$

$$= \frac{(1 + \text{sen } x) \cdot \cos x \cdot i}{\cos^2 x} = \frac{i \cdot \cos x}{1 - \text{sen } x} = h(x)$$

então: $f(x) = g(x), \forall x, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

52. a) $z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$

Então: $|z^3| = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$.

b) $z = 1 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$

Então: $|z^4| = (\sqrt{2})^4 = 4$.

c) $z = (5 + 12i)i = -12 + 5i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$

ou

$z_1 = 5 + 12i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$z_2 = i \Rightarrow |z_2| = 1$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 13 \cdot 1 = 13$

d) $z_1 = 1 + i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2}$
$z_2 = 2 + 2i \Rightarrow |z_2| = 2\sqrt{2}$
$z_3 = 4 + 4i \Rightarrow |z_3| = 4\sqrt{2}$
Então:
$|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| = (\sqrt{2})(2\sqrt{2})(4\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}.$

e) $z_1 = 1 + i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2}$
$z_2 = 2 - 2i \Rightarrow |z_2| = 2\sqrt{2}$
Então:
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

f) $z_1 = 5i \Rightarrow |z_1| = 5$
$z_2 = 3 + 4i \Rightarrow |z_2| = 5$
Então:
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{5}{5} = 1.$$

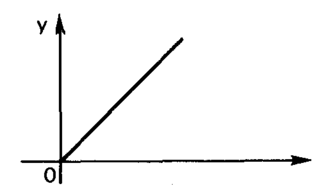
57. $|z| = |w| = 1$ e $1 + zw \neq 0$
$z = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha,\ w = \cos\beta + i\operatorname{sen}\beta$
$$\begin{aligned} z + w &= (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) + (\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) \\ &= (\cos\alpha + \cos\beta) + i(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta) \\ &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2i\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 1 + zw &= 1 + (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) \\ &= 1 + (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + i(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) \\ &= 1 + \cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ &= 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 2i\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \end{aligned}$$
Então:
$$\frac{z+w}{1+zw} = \frac{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$
Portanto, $\dfrac{z+w}{1+zw}$ é real.

58. $z_1 = \rho(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$
$z_2 = \rho(\operatorname{sen}\phi + i\cos\phi)$
Então:
$$\begin{aligned} z_1 - iz_2 &= \rho(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) - i\rho(\operatorname{sen}\phi + i\cos\phi) \\ &= \rho(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi) + \rho(\cos\phi - i\operatorname{sen}\phi) \\ &= 2\rho\cos\phi \end{aligned}$$
Portanto, $z_1 - iz_2$ é real.

59. $z_1 = \cos\alpha + i\cdot\operatorname{sen}\alpha$ e $z_2 = \cos\beta + i\cdot\operatorname{sen}\beta$
$z_1 + z_2 = 1 \Rightarrow (\cos\alpha + \cos\beta) + i\cdot(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\cos\alpha + \cos\beta = 1$ e $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\cos\alpha = \cos\beta = \dfrac{1}{2}\right.$ e $\left.\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
Portanto, $z_1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

65. Determinemos as coordenadas de P_1, P_2, P_3 e P_4, afixos de b, $b + z$, $b + z + iz$ e $b + iz$, respectivamente:
$b = 2\cdot(\cos 30^\circ + i\cdot\operatorname{sen}30^\circ) = \sqrt{3} + i \Rightarrow P_1 = (\sqrt{3}, 1)$
$b + z = (\sqrt{3} + \rho\cdot\cos\theta) + i(1 + \rho\cdot\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow P_2 = (\sqrt{3} + \rho\cdot\cos\theta,\ 1 + \rho\cdot\operatorname{sen}\theta)$
$b + z + iz = (\sqrt{3} + \rho\cdot\cos\theta - \rho\cdot\operatorname{sen}\theta) + i(1 + \rho\cdot\operatorname{sen}\theta + \rho\cdot\cos\theta) \Rightarrow$
$\Rightarrow P_3 = (\sqrt{3} + \rho\cdot\cos\theta - \rho\cdot\operatorname{sen}\theta,\ 1 + \rho\cdot\operatorname{sen}\theta + \rho\cdot\cos\theta)$
$b + iz = (\sqrt{3} - \rho\cdot\operatorname{sen}\theta) + i\cdot(1 + \rho\cdot\cos\theta) \Rightarrow$
$\Rightarrow P_4 = (\sqrt{3} - \rho\cdot\operatorname{sen}\theta,\ 1 + \rho\cdot\cos\theta)$
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\rho^2\cdot\cos^2\theta + \rho^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta} = \rho \text{ e } m_{P_1P_2} = \operatorname{tg}\theta$$
$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\rho\cdot\operatorname{sen}\theta)^2 + (\rho\cdot\cos\theta)^2} = \rho \text{ e } m_{P_2P_3} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$
$$\overline{P_3P_4} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\rho\cdot\cos\theta)^2 + (\rho\cdot\operatorname{sen}\theta)^2} = \rho \text{ e } m_{P_3P_4} = \operatorname{tg}\theta$$
$$\overline{P_4P_1} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\rho\cdot\operatorname{sen}\theta)^2 + (\rho\cdot\cos\theta)^2} = \rho \text{ e } m_{P_4P_1} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$
então $P_1P_2P_3P_4$ é um quadrado.

66. $z = x + yi, \bar{z} = x - yi$
$$\frac{z}{\bar{z}} = -i \Rightarrow \frac{x+yi}{x-yi} = -i \Rightarrow x + yi = -y - xi \Rightarrow x = -y$$
e esta condição é satisfeita pelos pontos da reta $x = -y$, bissetriz do 2º e 4º quadrantes do plano de Argand-Gauss.



67. $z_1 \neq 0$ e $z_1 = r(\cos a + i\operatorname{sen} a)$
$z_2 \neq 0$ e $z_2 = s(\cos b + i\operatorname{sen} b)$
Então:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos a + i\operatorname{sen} a)}{s(\cos b + i\operatorname{sen} b)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) + i(-\operatorname{sen} b \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos b)}{s(\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b)}$$

$$= \frac{r}{s}[\cos(a - b) + i \operatorname{sen}(a - b)]$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(a - b) = 0 \Rightarrow a = b \text{ ou } a = b + \pi$$

Então, $\frac{z_1}{z_2} = \pm\frac{r}{s}$ é uma reta que passa pela origem.

69. $|z - (1 + i)| \leqslant 1$

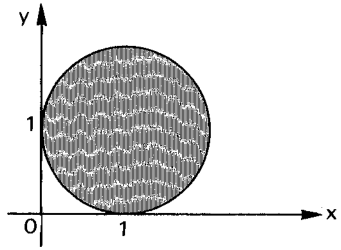
$z = x + iy$

Temos:

$$|z - (1 + i)| = |(x - 1) + i(y - 1)| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$$

Então:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$ representa um círculo de centro $(1, 1)$ e raio 1.



70. $z = x + yi$ e $t = 2 + 3i$

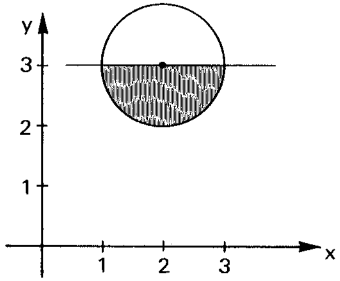
$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - t| \leqslant 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 1\}$$

é um círculo de centro $(2, 3)$ e raio 1

$B = \{x \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \leqslant 3\}$

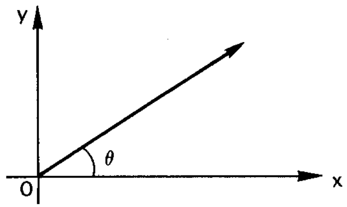
é um semiplano situado da reta $y = 3$ para baixo.

$A \cap B$ representa um semicírculo.



71. $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, θ fixo.

Como ρ percorre $\mathbb{R}$, z representa uma semi-reta com origem O e formando ângulo θ com o eixo dos x.



72. a) $z = x + iy$

Então:

$$w = 1 - \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x + iy}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2} + \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

u é a parte real e v a parte imaginária do complexo w.

Então:

$$u = \frac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

b) Se $y = x$, então $u = \frac{2x^2 - x}{2x^2} = 1 - \frac{1}{2x}$ e $v = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$.

Daí $u = 1 - v$, portanto $Q = u + iv$ percorre a reta $u = 1 - v$. Notemos para encerrar que $v \neq 0$, caso contrário $y = 0 = x$ e anula-se z.

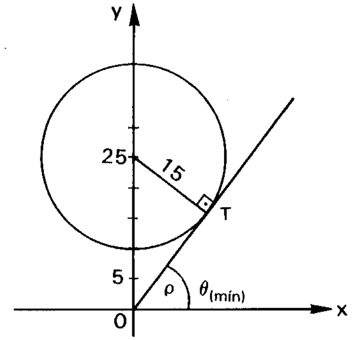
73. Seja $z = x + yi$ um número complexo que satisfaz a condição $|z - 25i| \leqslant 15$, então:

$|x + (y - 25)i| \leqslant 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + (y - 25)^2 \leqslant 225.$

Conclui-se que z pode ser qualquer complexo representado por ponto do círculo de centro $(0, 25)$ e raio 15 (ver figura).

O complexo que tem o menor argumento é representado por $T(x, y)$, ponto de tangência da reta $\overleftrightarrow{OT}$ com o círculo. T satisfaz duas condições:



$\overline{OT}^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow x^2 + y^2 = 400$

T está na circunferência $\Rightarrow x^2 + (y - 25)^2 = 225.$

Resolvendo o sistema, temos $x = 12$ e $y = 16$, então $z = 12 + 16i$.

74. $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

Então:

$$z^2 + \rho^2 = \rho^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 2i \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta) + \rho^2 =$$

$$= \rho^2(2\cos^2\theta + 2i \operatorname{sen}\theta\cos\theta) =$$

$$= 2\rho^2\cos\theta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{z}{z^2 + \rho^2} = \frac{\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}{2\rho^2\cos\theta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} =$$

$$= \frac{1}{2\rho\cos\theta}\left(\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \text{ é real.}$$

$$iz = i\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho(-\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)$$

Então:

$$\frac{\rho - iz}{\rho + iz} = \frac{\rho\,(1 + \text{sen}\,\theta - i\cos\theta)}{\rho\,(1 - \text{sen}\,\theta + \cos\theta)}$$

$$= \frac{1 + \text{sen}\,\theta - i\cos\theta}{1 - \text{sen}\,\theta + i\cos\theta} \cdot \frac{1 - \text{sen}\,\theta - i\cos\theta}{1 - \text{sen}\,\theta - i\cos\theta}$$

$$= \frac{(1 - \text{sen}^2\theta - \cos^2\theta) - i[(1 + \text{sen}\,\theta)\cos\theta + \cos\theta\,(1 - \text{sen}\,\theta)]}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}$$

$$= -\frac{2i\cos\theta}{2(1 - \text{sen}\,\theta)}$$

$$= i\,\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta - 1}\left(\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) \text{ é imaginário puro.}$$

75. a) $|a + bi| = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$ (I)

$b - a = 1$ (II)

Resolvendo o sistema, temos:

$a = 3$ e $b = 4$ ou $a = -4$ e $b = -3$.

Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow a + bi = 3 + 4i$.

b) $(c + di)^2 = (c^2 - d^2) + 2icd = -5 - 12i$

Então:

$$\begin{cases} c^2 - d^2 = -5 \\ 2cd = -12 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$c = -2$ ou $c = 2$.

Como $c < 0$, temos que $c = -2$ e $d = 3$ e $c + di = -2 + 3i$.

Então:

$$\frac{(a + bi)^2}{c + di} - \frac{1}{a + ci} - \frac{1 + i}{13i} =$$

$$= \frac{(3 + 4i)^2}{-2 + 3i} \cdot \frac{-2 - 3i}{-2 - 3i} - \frac{1}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} - \frac{1 - i}{13}$$

$$= \frac{(-7 + 24i)(-2 - 3i)}{4 + 9} - \frac{3 + 2i}{9 + 4} - \frac{1 - i}{13}$$

$$= \frac{86 - 27i}{13} - \frac{4 + i}{13}$$

$$= \frac{82}{13} - i\frac{28}{13}.$$

82. $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

$$z^n = (\sqrt{3} + i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}\right)$$

Então:

a) z^n é real e positivo $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l} \text{Im}(z^n) = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{n\pi}{6} = 0 \\ \text{Re}(z^n) > 0 \Rightarrow \cos\frac{n\pi}{6} > 0 \end{array} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n\pi}{6} = 2k\pi \Rightarrow n = 12k\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Então, o menor valor de n para que z^n seja real e positivo é $n = 0$.

b) z^n é real e negativo $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \text{Im}(z^n) = 0 \\ \text{Re}(z^n) < 0 \end{array} \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \text{sen}\,\frac{n\pi}{6} = 0 \\ \cos\frac{n\pi}{6} < 0 \end{array} \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Rightarrow n = 6(2k + 1)\ (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Então, o menor valor de n para que z^n seja real e negativo é $n = 6$.

c) z^n é imaginário puro $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \text{Im}(z^n) \neq 0 \\ \text{Re}(z^n) = 0 \end{array} \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \text{sen}\,\frac{n\pi}{6} \neq 0 \\ \cos\frac{n\pi}{6} = 0 \end{array} \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow n = 3 + 6k\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Então, o menor valor de n para que z^n seja imaginário puro é $n = 3$.

83. $z = a + bi$

a) $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0 \Rightarrow i(a + bi) + 2(a - bi) = -1 + i \Rightarrow$

$$(2a - b) + (a - 2b)i = -1 + i \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ a - 2b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = -1$ e $b = -1$.

Então, $z = -1 - i$.

b) $z = -1 - i$

Então, $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ e

$$z = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$$

temos, portanto: $\arg z = \frac{5\pi}{4}$.

c) $$z^{1004} = (\sqrt{2})^{1004}\left(\cos\frac{1004 \cdot 5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{1004 \cdot 5\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{502}(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$$

$$= 2^{502}(-1)$$

$$= -2^{502}$$

89. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ é uma das raízes quartas de z, então

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = z \Rightarrow z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4(1 + i)^4 = \frac{1}{4}(-4) = -1.$$

Logo, $z = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi$ e

$$\sqrt{z} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{2} \quad (k = 0, 1)$$

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

$$w_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Portanto, as raízes quadradas de z são i e $-i$.

90. -2 é uma das raízes sextas do complexo z; então

$(-2)^6 = z \Rightarrow z = 64 = 64(\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0)$.

As raízes sextas de z são dadas pela fórmula:

$$z_k = 2 \cdot \left[\cos\frac{0 + 2k\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{0 + 2k\pi}{6}\right] \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2(\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0) = 2$

$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

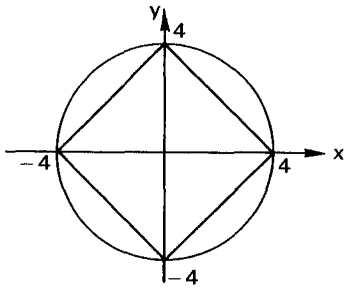
$k = 3 \Rightarrow z_3 = 2(\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi) = -2$

$k = 4 \Rightarrow z_4 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

$k = 5 \Rightarrow z_5 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

91. $z = 256 \Rightarrow |z| = 256$ e $\theta = 0$.

As raízes quartas de z são os vértices do quadrado inscrito na circunferência de raio $\sqrt[4]{256} = 4$ e centro na origem, tendo uma delas argumento 0.



92. $2i$ é uma das raízes sextas do complexo z, então:

$(2i)^6 = z \Rightarrow z = -64 = 64(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$.

As raízes sextas de z são dadas pela fórmula:

$$z_k = 2\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right] \text{ em que } k \text{ é um dos naturais } 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$

$k = 3 \Rightarrow z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$

$k = 4 \Rightarrow z_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$

$k = 5 \Rightarrow z_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$

Portanto, os números complexos representados pelos outros cinco vértices do hexágono são: $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-2i$ e $\sqrt{3} - i$.

93. $z = i + \sqrt[3]{-8i}$

Seja $u = -8i \Rightarrow \rho = |-8i| = 8$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$u = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

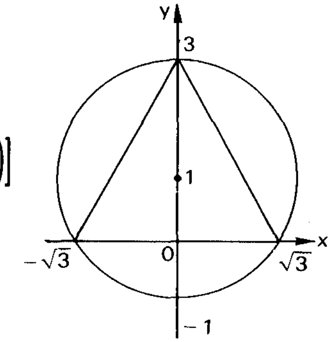
$$\sqrt[3]{u} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

Então:

$w_0 = 2i$ e $z = i + 2i = 3i$

$w_1 = -\sqrt{3} - i$ e $z = i - \sqrt{3} - i = -\sqrt{3}$

$w_2 = \sqrt{3} - i$ e $z = i + \sqrt{3} - i = \sqrt{3}$.



94. $(z - 1 + i)^4 = 1 \Rightarrow z - 1 + i = \sqrt[4]{1}$

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{4}\right)$$

$u = 1 \Rightarrow \rho = |u| = 1$ e $\theta = 0 \Rightarrow$

$$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{k\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}$$

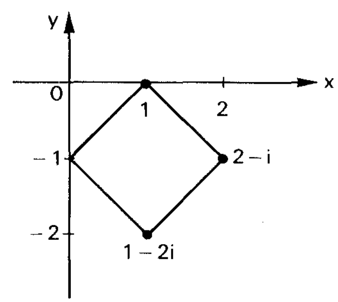
Então:

$w_0 = 1 \Rightarrow z = 2 - i$

$w_1 = i \Rightarrow z = 1$

$w_2 = -1 \Rightarrow z = -i$

$w_3 = -i \Rightarrow z = 1 - 2i$.



95. Seja $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$. As raízes $2n$-ésimas de z são os números complexos:

$$z_k = \sqrt[2n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2n} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right) \text{ com } k \text{ variando de } 0 \text{ a } 2n - 1.$$

A soma dessas raízes é:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} z_k = \sqrt[2n]{\rho} \cdot \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{2n} + i \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right).$$

Para cada k_1 atribuído a k, com $0 \leqslant k_1 < n$, existe um $k_2 = k_1 + n$, com $n \leqslant k < 2n$ tal que:

$$\cos \frac{\theta + 2k_2\pi}{2n} = \cos \frac{\theta + 2(k_1 + n)\pi}{2n} = \cos\left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{2n} + \pi\right) = -\cos\frac{\theta + 2k_1\pi}{2n}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\theta + 2k_2\pi}{2n} = \operatorname{sen} \frac{\theta + 2(k_1 + n)\pi}{2n} = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{2n} + \pi\right) = -\operatorname{sen}\frac{\theta + 2k_1\pi}{2n}$$

então:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{2n} = 0 \text{ e } \sum_{k=0}^{2n-1} \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{2n} = 0$$

(pois as parcelas são duas a duas opostas)

e daí $\sum_{k=0}^{2n-1} z_k = 0.$

96. Seja $z = a + ib$.
Então:
$z^2 = \overline{z}i$
$z^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
$\overline{z}i = (a + ib)i = -b + ai$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = -b \\ 2ab = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ ou } b = -1 \\ b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Então: $z = 0$ ou $z = -i$ ou $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ ou $z = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ e, portanto, o número de pontos é 4.

97. $z = x + iy$; $|z - 1|^2 = 2x$ e $y \geqslant 2$.
Então:
$|z - 1|^2 = |(x - 1) + yi|^2 = \sqrt{[(x - 1)^2 + y^2]^2} = 2x \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ é uma circunferência de centro $(2, 0)$ e raio $\sqrt{3}$. Como $y \geqslant 2 \geqslant \sqrt{3}$, o conjunto é vazio.

98. Seja $z = a + ib$.
Então:
$iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0 \Rightarrow i(a + ib) + 2(a - ib) + 1 - i = 0$
$(2a - b) + (a - 2b)i = -1 + i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = -1 \text{ e, portanto,}$$

$z = -(1 + i)$.

99. $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$
Temos:
$|z| = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}$
$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$
$z^2 + |z| = 0 \Rightarrow (r^2 \cdot \cos 2\theta + r) + i \cdot \operatorname{sen} 2\theta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 \cos 2\theta + r = 0 \\ r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, temos: $r = 0$ ou ($\operatorname{sen} 2\theta = 0$, $\cos 2\theta = -1$ e $r = 1$). Daí vem:
$z = 0$ ou

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i \text{ ou } z = \cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Portanto, o número de soluções da equação é 3.

100. $z_k = x + yi$
$(z_k + 1)^5 + z_k^5 = 0 \Rightarrow (z_k + 1)^5 = -z_k^5 \Rightarrow |(z_k + 1)^5| = |z_k^5| \Rightarrow$
$\Rightarrow |z_k + 1| = |z_k| \Rightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
Então todos os z_k, com $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, têm a mesma parte real e estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário.

Capítulo II – Polinômios

109. A soma dos coeficientes de $(4x^3 - 2x^2 - 2x - 1)^{36}$ é
$p(1) = (4 - 2 - 2 - 1)^{36} = (-1)^{36} = 1$.

110. $f(x) = 0$ para todo x do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, temos:
$f(1) = a + b + c + d = 0$
$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 0$
$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 0$
$f(4) = 64a + 16b + 4c + d = 0$
$f(5) = 125a + 25b + 5c + d = 0$
Resolvendo o sistema, encontramos $a = b = c = d = 0 \Rightarrow f(6) = 0$.

111. $f = (a - 2)x^3 + (b + 2)x + (3 - c) = 0$
Temos:
$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$
$b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$
$3 - c = 0 \Rightarrow c = 3$.

112. $f(x) = (a + b - 5)x^2 + (b + c - 7)x + (a + c)$ e $f(x) \equiv 0$
Temos:
$a + b - 5 = 0$
$b + c - 7 = 0$
$a + c = 0.$
Resolvendo o sistema, temos: $a = -1$, $b = 6$ e $c = 1$.

113. Sendo $f = (m \cdot n - 2)x^3 + (m^2 - n^2 - 3)x^2 + (m + n - 3)x + 2m - 5n + 1$ e se $f(x) \equiv 0$, temos:
$m \cdot n - 2 = 0$
$m^2 - n^2 - 3 = 0$
$m + n - 3 = 0$
$2m - 5n + 1 = 0.$
Resolvendo o sistema, temos $m = 2$ e $n = 1$ e, portanto:
$m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 5.$

114. $f(x) = (a - 1)x^2 + bx + c$, $g(x) = 2ax^2 + 2bx - c$ e $f(x) \equiv g(x)$. Temos:

$$\begin{cases} a - 1 = 2a \Rightarrow a = -1 \\ b = 2b \Rightarrow b = 0 \\ c = -c \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

116. $\dfrac{ax^2 - bx - 5}{3x^2 + 7x + c} = 3 \Rightarrow ax^2 - bx - 5 = 9x^2 + 21x + 3c, \forall x$

$$\begin{cases} a = 9 \\ -b = 21 \Rightarrow b = -21 \\ -5 = 3c \Rightarrow c = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

117. $\dfrac{3x^2 + 5x - 8}{ax^2 - 10x + b} = k, \forall x \in \mathbb{C}$
então:
$3x^2 + 5x - 8 = (ax^2 - 10x + b) \cdot k, \forall x \in \mathbb{C}$
e daí:
$3 = ka$, $5 = -10k$ e $-8 = kb$.
Resolvendo esse sistema, temos $a = -6$ e $b = 16 \Rightarrow a + b = 10$

118. $\dfrac{(m - 1)x^3 + (n - 2)x^2 + (p - 3)x + 8}{2x^2 + 3x + 4} = k, \forall x \in \mathbb{C}$
então:
$(m - 1)x^3 + (n - 2)x^2 + (p - 3)x + 8 = 2kx^2 + 3kx + 4k, \forall x \in \mathbb{C}$

e daí:
$m - 1 = 0$, $n - 2 = 2k$, $p - 3 = 3k$ e $8 = 4k$.
Resolvendo esse sistema, temos: $m = 1$, $n = 6$ e $p = 9$.

124. $f = x^2$, $g = x^2 + x^4$, $h = x^2 + x^4 + x^6$,
$k = 3x^6 - 6x^4 + 2x^2$ e
$k = af + bg + ch = ax^2 + b(x^2 + x^4) + c(x^2 + x^4 + x^6)$
$= cx^6 + (b + c)x^4 + (a + b + c)x^2$
então, $c = 3$, $b + c = -6$, $a + b + c = 2$
Portanto: $a = 8$; $b = -9$; $c = 3$.

125. $x^2 - 2x + 1 = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)$
$= (a + b)x^2 + (a + b + c)x + (a + c)$
Então: $a + b + c = -2$.

126. $2x^2 + 17 \equiv (x^2 + b)^2 - (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$, $a > 0$, $b > 0$
$\equiv 2bx^2 + b^2 + a^4$
Então:
$$\begin{cases} 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ b^2 + a^4 = 17 \Rightarrow a = \pm 2. \text{ Como } a > 0 \Rightarrow a = 2 \text{ e, portanto, } a - b = 1. \end{cases}$$

127. $a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) = 0$
$a_1(x^2 + 2x + 1) + a_2(x^2 + 1) + a_3(x^2 + 2x + 2) = 0$
$(a_1 + a_2 + a_3)x^2 + 2(a_1 + a_3)x + (a_1 + a_2 + 2a_3) = 0$
então:
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$
Resolvendo o sistema, temos $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e, portanto, $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são L.I.

128. $f = (x - 1)^2 + (x - 3)^2 - 2(x - 2)^2 - 2 =$
$= (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 6x + 9) - 2(x^2 - 4x + 4) - 2 =$
$= (1 + 1 - 2)x^2 + (-2 - 6 + 8)x + (1 + 9 - 8 - 2) =$
$= 0x^2 + 0x + 0$
$= 0$

129. $f = x^2 + px + q$ e $g = x^2 - (p + q)x + pq$
$f = g \Rightarrow (p = -p - q$ e $q = pq)$
Resolvendo esse sistema, temos:
$p = q = 0$ ou $(p = 1$ e $q = -2)$.

130. a) $a(x^2 - 1) + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx - a + c = 0$

Então:

$a = 0$

$b = 0$

$-a + c = 0 \Rightarrow a = c = 0.$

b) $a(x^2 + x) + (b + c)x + c = x^2 + 4x + 2 \Rightarrow$

$ax^2 + (a + b + c)x + c = x^2 + 4x + 2$. Então:

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ a + b + c = 4 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

c) $x^3 - ax(x + 1) + b(x^2 - 1) + cx + 4 = x^3 - 2 \Rightarrow$

$x^3 + (b - a)x^2 + (c - a)x - b + 4 = x^3 - 2$. Então:

$b - a = 0 \Rightarrow b = a$

$c - a = 0 \Rightarrow c = a$

$4 - b = -2 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = c = 6.$

131. $f = (x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1)$

$$\begin{aligned} f &= x^2(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1) + \sqrt{2}\cdot n(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1) + 1\cdot(x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1) \\ &= x^4 - \sqrt{2}\cdot x^3 + x^2 + \sqrt{2}\cdot x^3 - 2x^2 + \sqrt{2}\cdot x + x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1 \\ &= x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{2})x^3 + (1 - 2 + 1)x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{2})x + 1 \\ &= x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1 \\ &= x^4 + 1 \\ &= g \end{aligned}$$

132. $f = x^3 + \alpha x + \beta$

$g = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x + 2x^2 - x^4 = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$f = g$ impossível porque os coeficientes de x^3 são distintos e os de x^2 também.

134. f é polinômio quadrado perfeito se existir $px + q$ tal que $f = (px + q)^2$. Então:

$f = (ax + b)^2 + (cx + d)^2 = (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)x + b^2 + d^2 =$

$= p^2x^2 + 2pqx + q^2$

então:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = p^2 \text{ (I)} \\ 2(ab + cd) = 2pq \text{ (II)} \\ b^2 + d^2 = q^2 \text{ (III)} \end{cases}$$

(II) $\Rightarrow (ab + cd)^2 = (pq)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (ab)^2 + 2abcd + (cd)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (ab)^2 + 2abcd + (cd)^2 = (ab)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (cd)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (ad)^2 - 2abcd + (bc)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (ad - bc)^2 = 0 \Rightarrow ad = bc$

135. $4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4(p + 1)x + (p + 1)^2 = (ax^2 + bx + c)^2 =$

$= a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2$

Então:

$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$

$$2ab = -8 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } a = 2 \Rightarrow b = -2 \\ \text{se } a = -2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$2ac + b^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } a = 2 \Rightarrow c = 1 \\ \text{se } a = -2 \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

$$c^2 = (p + 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} p = -2 \\ p = 0 \end{cases}$$

$2bc = -4(p + 1) \Rightarrow 2(-2) = -4(p + 1) \Rightarrow p = 0$

Portanto: $p = 0$.

136. $P(x)$ é um cubo perfeito se existirem p e q tais que $P(x) = (px + q)^3$. Temos:

$P(x) = p^3\cdot x^3 + 3\,p^2qx^2 + 3p\cdot q^2x + q^3$.

Então:

$A = p^3$ (I); $B = 3p^2q$ (II); $C = 3pq^2$ (III); $D = q^3$ (IV)

$$\text{(II)} \Rightarrow B^2 = (3p^2q)^2 \overset{\text{(III)}}{\Rightarrow} \frac{B^2}{C} = \frac{9p^4q^2}{3pq^2} = 3p^3 \overset{\text{(I)}}{=} 3A \Rightarrow C = \frac{B^2}{3A}.$$

$$\text{(II)} \Rightarrow B^3 = (3p^2q)^3 = 27p^6q^3 \overset{\text{(IV)}}{=} 27A^2\cdot D \Rightarrow D = \frac{B^3}{27\,A^2}.$$

Portanto: $C = \dfrac{B^2}{3A}$ e $D = \dfrac{B^3}{27A^2}$.

137. $(k + 1)x^2 + (k - 3)x + 13 = (x + a)^2 + (x + b)^2 =$

$= 2x^2 + 2(a + b)x + a^2 + b^2$

Então:

$$\begin{cases} k + 1 = 2 \Rightarrow k = 1 \\ k - 3 = 2(a + b) \Rightarrow a + b = -1 \\ 13 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \Rightarrow b = 2 \\ a = 2 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

Conclusão: para $k = 1$, o trinômio dado fica $2x^2 - 2x + 13$, que é igual a $(x - 3)^2 + (x + 2)^2$.

138. $-6x^2 + 36x - 56 = (x - b)^3 - (x - a)^3$

$= 3(a - b)x^2 + 3(b^2 - a^2)x + a^3 - b^3$

Então:

$$\begin{cases} 3(a - b) = -6 \Rightarrow a - b = -2 \\ 3(b^2 - a^2) = 36 \Rightarrow b^2 - a^2 = 12 \\ a^3 - b^3 = -56 \end{cases} \Rightarrow b = 4 \text{ e } a = 2$$

Portanto: $-6x^2 + 36x - 56 = (x - 4)^3 - (x - 2)^3$.

139. $$f = g^2 \Rightarrow \begin{cases} f = x^4 + 2\alpha x^3 - 4\alpha x + 4 \\ g^2 = (x^2 + 2x + 2)^2 = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 \end{cases}$$

o que é impossível, pois f não tem termo em x^2.

147. a) $P(10) = A = \alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
$= 10^2\alpha + 10^1\beta + 10^0\gamma$. Então:
$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
b) $A = \alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
$= (99 + 1)\alpha + (9 + 1)\beta + \gamma$
$= 99\alpha + 9\beta + (\alpha + \beta + \gamma)$
portanto, A é divisível por 3 se, e somente se, $\alpha + \beta + \gamma$ é múltiplo de 3.

149. $f(x) = ax^2 + bx + c$
$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$ (I)
$f(x) = f(x - 1), \forall x \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c, \forall x$
então $ax^2 + bx + c = ax^2 + (b - 2a)x + (a - b + c), \forall x$
e daí vem $b = b - 2a$ (II) e $c = a - b + c$ (III).
De (II) vem $a = 0$, e o problema é impossível porque f deveria ser do 2º grau.

150. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$P(-x) = a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d = -ax^3 + bx^2 - cx + d$
$P(x) = P(-x) \Rightarrow a = -a \Rightarrow a = 0$
então $P(x)$ não é do 3º grau e, portanto, nenhum polinômio tem a propriedade desejada.

151. $a_0 = -1$
$a_1 = 1 + i \cdot a_0 = 1 + i(-1) = 1 - i$
$a_2 = 1 + i \cdot a_1 = 1 + i(1 - i) = 2 + i$
$a_3 = 1 + i \cdot a_2 = 1 + i(2 + i) = 2i$
$a_4 = 1 + i \cdot a_3 = 1 + i(2i) = -1 = a_0$
Os coeficientes formam uma seqüência cíclica
$(1, 1 - i, 2 + i, 2i, -1, 1 - i, 2 + i, 2i, \ldots)$, então:
$a_{30} = a_{26} = a_{22} = \ldots = a_2 = 2 + i$.

152. a) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$P(x - 1) = a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d =$
$= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 2b + 3a)x + (-a + b - c + d)$
Impondo $P(x) - P(x - 1) = x^2, \forall x$, vem
$3ax^2 - (2b - 3a)x + (a - b + c) = x^2, \forall x$
e daí:
$3a = 1, -2b + 3a = 0$ e $a - b + c = 0$
de onde vem $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = \frac{1}{6}$.

Conclusão: $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$.

b) $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 =$
$= [P(1) - P(0)] + [P(2) - P(1)] + [P(3) - P(2)] + \ldots + [P(n) - P(n - 1)] =$

$= P(n) - P(0) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + d - d =$
$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

154. Sejam q o quociente e r o resto da divisão de f por g, tais que $\delta g = 4$ e $\delta q = 2$.
Temos:
$\left.\begin{array}{l} \text{I) } qg + r = f \Rightarrow \delta(qg + r) = \delta f \\ \text{II) } \delta r < \delta g \end{array}\right\} \Rightarrow \delta f = \delta q + \delta g$
a) $\delta r = 1 \Rightarrow \delta f = 2 + 4 = 6$
b) $\delta r = 2 \Rightarrow \delta f = 2 + 4 = 6$.
Portanto: $\delta f = 6$ nos dois casos.

155. $\delta P(x) = m, \delta S(x) = n, n < m, \delta R(x) = p$. Então:
$\delta R(x) < \delta S(x) = n \Rightarrow \delta R(x) \leqslant n - 1$.
Portanto: $0 \leqslant p \leqslant n - 1$.

156. Sejam Q o quociente e R o resto da divisão de P por B, tais que $\delta P = p$ e $\delta Q = q$.
Então: $\delta B = \delta P - \delta Q = p - q$ e $\delta R < \delta B = p - q$.
Portanto: $\delta R \leqslant p - q - 1$.

161. $f = x^4 - 3ax^3 + (2a - b)x^2 + 2bx + (a + 3b)$
$g = x^2 - 3x + 4$
$\delta q = \delta f - \delta g = 2 \Rightarrow q = mx^2 + nx + s$
$r = 0$
$f = qg = (mx^2 + nx + s)(x^2 - 3x + 4)$
$= mx^4 + (n - 3m)x^3 + (4m - 3n + s)x^2 + (4n - 3s)x + 4s$
então: $m = 1$, $n - 3m = -3a$, $4m - 3n + s = 2a - b$, $4n - 3s = 2b$ e $4s = a + 3b$.
Resolvendo o sistema, temos: $a = \frac{1}{34}$ e $b = \frac{93}{34}$.

162. $\delta Q = \delta F - \delta G = 4 - 2 = 2 \Rightarrow Q = ax^2 + bx + c$
$R = 0$
$F = QG = (ax^2 + bx + c)(x^2 + px + q)$
$x^4 + 1 = ax^4 + (ap + b)x^3 + (aq + bp + c)x^2 + (bq + cp)x + qc$
então: $a = 1$, $ap + b = 0$, $aq + bp + c = 0$, $bq + cp = 0$ e $qc = 1$.
Resolvendo o sistema, temos: $q = 1$ e $p = \pm\sqrt{2}$.

163. $\delta Q = \delta P_1 - \delta P_2 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow Q(x) = ax + b$
$R = 0$
$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) = (ax + b)(x^2 - x + 1)$
$x^3 + px^2 - qx + 3 = ax^3 + (b - a)x^2 + (a - b)x + b$

então: $a = 1,\ b - a = p,\ a - b = -q$ e $b = 3$.
Resolvendo o sistema, temos: $p = q = 2$.

164. $\delta Q = \delta F - \delta G = 3 - 2 = 1 \Rightarrow Q(x) = ax + b$
$R = 0$
$F(x) = Q(x) \cdot G(x) = (ax + b)(x^2 + 2x + 5)$
$x^3 + px + q = ax^3 + (2a + b)x^2 + (5a + 2b)x + 5b$
então: $a = 1,\ 2a + b = 0,\ 5a + 2b = p$ e $5b = q$.
Resolvendo o sistema, temos: $p = 1$ e $q = -10$.

168. $\delta F(x) = \delta A(x) - \delta B(x) = 1 \Rightarrow F(x) = ax + b$
$R = 0$
$A(x) = B(x) \cdot F(x) = (ax + b)(-x^2 + 5x - 6)$
$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = -ax^3 + (5a - b)x^2 + (5b - 6a)x - 6b$
então: $-a = 1,\ 5a - b = -2,\ 5b - 6a = -9$ e $-6b = 18$.
Resolvendo o sistema, temos: $a = -1$ e $b = -3$ e portanto:

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = ax + b = -x - 3.$$

169. Pelo método da chave, temos:

$$\begin{array}{rrr|l}
2x^3 & + x^2 & - 8x & x^2 - 4 \\ \cline{4-4}
-2x^3 & & + 8x & 2x + 1 \\ \hline
& x^2 & & \\
& -x^2 & + 4 & \\ \cline{2-3}
& & 4 &
\end{array}$$

Então: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 2x + 1 + \dfrac{4}{x^2 - 4}$.

170. Com $\delta P \geqslant 3$, a igualdade é impossível porque o 1º membro tem grau maior que o 2º.
$\delta P < 3 \Rightarrow P(x) = ax^2 + bx + c$. Temos, então:
$(3x + 2)P(x) = 3x^3 + x^2 - 6x - 2 + P(x) \Rightarrow$
$3ax^3 + (3b + 2a)x^2 + (3c + 2b)x + 2c = 3x^3 + (a + 1)x^2 + (b - 6)x + c - 2$
então: $3a = 3,\ 3b + 2a = a + 1,\ 3c + 2b = b - 6$ e $2c = c - 2$.
Resolvendo o sistema, temos: $a = 1,\ b = 0$ e $c = -2$ e, portanto,
$P(x) = x^2 + 0 \cdot x - 2 = x^2 - 2 = B(x)$.

171. $\delta q = 2 \Rightarrow q = ax^2 + bx + c$ e $r = 0$. Temos:
$2x^4 + 3x^3 + mx^2 - nx - 3 = (ax^2 + bx + c)(x^2 - 2x - 3) =$
$= ax^4 + (b - 2a)x^3 + (c - 3a - 2b)x^2 + (-3b - 2c)x - 3c$
então: $a = 2,\ b - 2a = 3,\ c - 3a - 2b = m,\ -3b - 2c = -n$ e $-3c = -3$.
Resolvendo o sistema, temos: $m = -19$ e $n = 23$.

172. a)

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & & + Ax & + 3B & x^2 - 3x + 9 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & + 6x^2 & - 18x & & 2x + 6 \\ \hline
& 6x^2 & + (A - 18)x & + 3B & \\
& -6x^2 & 18x & - 54 & \\ \cline{2-4}
& & Ax & + 3B - 54 &
\end{array}$$

Então, temos: quociente $= 2x + 6$
resto $= Ax + 3B - 54$.

b) Para que a divisão seja exata, devemos ter resto nulo.
Então:

$$r = Ax + 3b - 54 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 18. \end{cases}$$

173.

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & a & b & 20 & 1 \ -5 \ 4 \\ \cline{5-5}
-1 & 5 & -4 & & 1 \quad a + 5 \\ \hline
& a + 5 & b - 4 & 20 & \\
& -(a + 5) & 5a + 25 & -4a - 20 & \\ \cline{2-4}
& & b + 5a + 21 & -4a &
\end{array}$$

Então:
$-4a = 0 \Rightarrow a = 0$
$b + 5a + 21 = 0 \Rightarrow b = -21$ e, portanto:
$a + b = -21$.

175.

$$\begin{array}{rrrr|l}
4 & -3 & m & 1 & 2 \ -1 \ 1 \\ \cline{5-5}
-4 & 2 & -2 & & \\ \cline{1-4}
& -1 & m - 2 & 1 & 2 \quad -\frac{1}{2} \\
& 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \cline{2-4}
& & m - \frac{5}{2} & \frac{3}{2} &
\end{array}$$

Então, o resto da divisão de $P_1(x)$ por $P_2(x)$ independe de x se, e somente se,
$m - \dfrac{5}{2} = 0$ ou $m = \dfrac{5}{2}$.

177. Temos inicialmente:
(I) $A = QB + R$ e (II) $\delta R < \delta B$
Sejam Q_1 o quociente e R_1 o resto da divisão de A por $2B$.
(III) $A = Q_1(2B) + R_1$ e (IV) $\delta R_1 < \delta(2B)$
De (I) e (II), temos:

$$A = \left(\frac{1}{2}Q\right)(2B) + R \text{ e } \delta R < \delta B = \delta(2B)$$

portanto, $\frac{1}{2}Q$ e R satisfazem as condições para serem quociente e resto, respectivamente, da divisão de A por $2B$.
Então, devido à unicidade do quociente e do resto, devemos ter:

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q \text{ e } R_1 = R.$$

178. Se $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + ax + b$ e $x^2 + rx + s$, então:
$x^3 + px + q = (x^2 + ax + b)(mx + n) = mx^3 + (am + n)x^2 + (bm + an)x + bn$
$x^3 + px + q = (x^2 + rx + s)(m'x + n') = m'x^3 + (rm' + n')x^2 + (sm' + rn')x + sn'$
Temos, então:

$$\begin{cases} m = 1 \\ \left.\begin{array}{l} am + n = 0 \Rightarrow a = -n \\ bm + an = p \end{array}\right\} \Rightarrow p = b - a^2 \text{ (1)} \\ bn = q \Rightarrow q = -ab \text{ (2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m' = 1 \\ \left.\begin{array}{l} rm' + n' = 0 \Rightarrow r = -n' \\ sm' + rn' = p \end{array}\right\} \Rightarrow p = s - r^2 \text{ (3)} \\ sn' = q \Rightarrow q = -sr \text{ (4)} \end{cases}$$

de (2) e (4) $\Rightarrow s = \frac{ab}{r}$ (5)

de (1) e (3) $\Rightarrow b - a^2 = s - r^2 \overset{(5)}{=} \frac{ab}{r} - r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r(b - a^2) = ab - r^3 \Rightarrow rb - ab = ra^2 - r^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{r(a^2 - r^2)}{r - a} = -\frac{r(a + r)(a - r)}{a - r} = -r(a + r)$

179. f é um cubo perfeito se existir um polinômio $mx + n$ tal que $(mx + n)^3 = f$.
Impondo essa igualdade, temos:
$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = m^3x^3 + 3\, m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3$
e daí vem $a = m^3$, $b = m^2n$, $c = mn^2$ e $d = n^3$
e este sistema dá como solução $m = \sqrt[3]{a}$ e $n = \sqrt[3]{d}$. Esta solução só satisfaz as quatro equações se:
$b = m^2n = \sqrt[3]{a^2d}$ e $c = mn^2 = \sqrt[3]{ad^2}$, ou seja, $b^3 = a^2d$ e $c^3 = ad^2$.

181. Sejam q_1 e q_2 os quocientes das divisões, respectivamente, de f por h e de g por h: $\begin{cases} f = q_1 \cdot h \\ g = q_2 \cdot h \end{cases}$.
Sejam q o quociente e r o resto da divisão de:
a) $f + g$ por h: $f + g = qh + r$. Temos: $r = f + g - q \cdot h \Rightarrow$
$\Rightarrow r = q_1 \cdot h + q_2 \cdot h - q \cdot h = (q_1 + q_2 - q)h$. Portanto, $f + g$ é divisível por h.
b) $f - g$ por h: $f - g = qh + r \Rightarrow r = f - g - qh \Rightarrow$
$\Rightarrow r = q_1h - q_2h - qh = (q_1 - q_2 - q)h$. Portanto, $f - g$ é divisível por h.

c) $f \cdot g$ por h: $fg = qh + r \Rightarrow r = fg - qh \Rightarrow$
$\Rightarrow r = (q_1h)(q_2h) - qh = (q_1 \cdot q_2h - q)h$. Portanto, $f \cdot g$ é divisível por h.

189. Sejam $f = 4x^n + 3x^{n-2} + 1$ e $g = x + 1$.
a) n par $\Rightarrow r = f(-1) = 4(-1)^n + 3(-1)^{n-2} + 1 = 8$
b) n ímpar $\Rightarrow r = f(-1) = 4(-1)^n + 3(-1)^{n-2} + 1 = -4 - 3 + 1 = -6$
Portanto: se n par, $r = 8$; se n ímpar, $n = -6$.

190. Para que $P(x)$ seja divisível por $x + a$, é necessário que o resto r da divisão seja 0, mas $r = P(-a)$; então deve-se ter $P(-a) = 0$. *Conclusão:* $-a$ deve ser raiz de $P(x)$.

197. Seja $f = ax^3 - 2x + 1$; $f(3) = 4 \Rightarrow 27a - 5 = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$.

198.

5	0	a	b	3	1	2
5	10	a + 20	2a + b + 40	4a + 2b + 83	$\underbrace{8a + 4b + 167}_{r}$	

$q = 5x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 115$, então:
$4a + 2b + 83 = 115 \Rightarrow 4a + 2b = 32$ e
$r = 8a + 4b + 167 = 64 + 167 = 231$

199.

2	8	−1	0	16	−4
	−8	b	4	e	
2	a	c	d	f	

A terceira linha é a soma das duas primeiras; então:
$8 + (-8) = a$, $(-1) + b = c$, $0 + 4 = d$, $16 + e = f$.
A segunda linha é obtida multiplicando os elementos 2, a, c, d (da terceira linha) por -4, então:
$a \cdot (-4) = b$, $c \cdot (-4) = 4$ e $d \cdot (-4) = e$.
Dessas sete condições resulta:
$a = 0$, $b = 0 \cdot (-4) = 0$, $c = \frac{4}{-4} = -1$, $d = 4$, $e = 4 \cdot (-4) = -16$ e
$f = 16 + (-16) = 0$.

200. $P(x)$ é um determinante de Vandermonde. Então,
$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$.
O resto da divisão de $P(x)$ por $x - b$ é $r = P(b) = 0$.

201. $P(x) = x^3 - 0{,}52x - 1{,}626$ e $P(1) = -1{,}146$
$D(x) = x - 1{,}32$ e $D(1) = -0{,}32$. Portanto:
$P(1) + D(1) = -1{,}146 - 0{,}32 = -1{,}466$.

202. $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_n \cdot x^n$ e $a_0, a_1, \dots, a_n$ formam, nessa ordem, uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$. Então:

$$P(x) = a_0 + a_0 \cdot \frac{1}{2}x + a_0\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \dots + a_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n$$
$$= a_0\left[1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right]$$
$$r = P(-2) = a_0\left[1 + \frac{-2}{2} + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{-2}{2}\right)^n\right]$$
$$= a_0[1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1]$$
$$= a_0 \cdot 0 = 0.$$

204. $f = ax^2 + bx + c$
I) $a = 1 \Rightarrow f = x^2 + bx + c$
II) f é divisível por $x - 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1 + b + c = 0$ ①
III) Os restos das divisões de f por $x - 2$ e $x - 3$ são iguais:
$f(2) = f(3) \Rightarrow 4 + 2b + c = 9 + 3b + c.$ ②
Resolvendo ① e ②, temos: $b = -5$ e $c = 4$. Portanto, $f = x^2 - 5x + 4$.

205. I) f é polinômio do 3º grau $\Rightarrow f = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
II) f se anula para $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0.$ ①
III) f dividido por $x + 1$, $x - 2$ e $x + 2$ dá restos iguais a $6 \Rightarrow$
$f(-1) = 6 \Rightarrow -a + b - c + d = 6$
$f(2) = 6 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 6$
$f(-2) = 6 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 6.$
Resolvendo o sistema de equações, temos: $a = b = 1$; $c = -4$ e $d = 2$.
Portanto, $f = x^3 + x - 4x + 2$.

214. $f(1) = f(2) = f(-3) = 0 \Rightarrow f$ é divisível por $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$.
Portanto, $r = 0$.

215. Seja $f = qg + r$; $g = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$; $f(-1) = 5$; $f(1) = f(2) = -1$.
$\delta r < \delta g = 3 \Rightarrow r = ax^2 + bx + c$
$f = (x + 1)(x - 1)(x - 2) \cdot q(x) + (ax^2 + bx + c)$, então:
$f(-1) = 5 \Rightarrow a - b + c = 5$
$f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1$
$f(2) = -1 \Rightarrow 4a + 2b + c = -1.$
Resolvendo o sistema, temos: $a = c = 1$ e $b = -3$. Portanto, $r = x^2 - 3x + 1$.

216. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$P(-1) = 0 \Rightarrow -a + b - c + d = 0$
$P(1) = 10 \Rightarrow a + b + c + d = 10$
$P(-2) = 10 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 10$
$P(-3) = 10 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 10$

Resolvendo o sistema, temos: $a = c = \frac{5}{2}$, $b = 10$, $d = -5$.

Portanto: $P(x) = \frac{5}{2} \cdot x^3 + 10x^2 + \frac{5}{2} \cdot x - 5$ e o coeficiente de x^3 é $\frac{5}{2}$.

217. $f = x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$, $g = x^3 - (a + 2b)x + 2a$;
$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - 5a - 4b = 0$
$g(-1) = 0 \Rightarrow -1 + 3a + 2b = 0$
Resolvendo o sistema, temos: $a = 3$ e $b = -4$.

218. $f = x^p + 2a^q x^{p-q} + a^p$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $p > q$
$f(-a) = (-a)^p + 2 \cdot a^q \cdot (-a)^{p-q} + a^p$
Se p e q são ímpares, temos:
$f(-a) = -a^p + 2 \cdot a^q \cdot a^{p-q} + a^p = 2a^p$.
Se p e q são pares, temos:
$f(-a) = a^p + 2 \cdot a^q \cdot a^{p-q} + a^p = 4a^p$.
Se q é par e p é ímpar, temos:
$f(-a) = -a^p - 2 \cdot a^q \cdot a^{p-q} + a^p = -2a^p$.
Se p é par e q é ímpar, temos:
$f(-a) = a^p - 2 \cdot a^q \cdot a^{p-q} + a^p = 0$ (independente de a).
Portanto, p par e q ímpar é a solução.

228. $P(x) = x^{999} - 1$; $P(1) = 1^{999} - 1 = 0 \Rightarrow R(x) = 0$

	$\overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}^{998 \text{ zeros}}$				
1	0	0	0	−1	1
1	1	1	1	0	

$Q(x) = x^{998} + x^{997} + \dots + x + 1$ e $Q(0) = 1$
Portanto: $R(x) = 0$ e $Q(0) = 1$.

229. Aplicando duas vezes Briot:

1	0	a	b	1
1	1	a + 1	$a + b + 1 = r_1$	1
1	2	$a + 3 = r_2$		

Impondo $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, vem:
$a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$
$a + b + 1 = 0 \Rightarrow b = 2.$

230. $P(2) = 13$, $P(-2) = 5$ e $P(x) = (x^2 - 4) \cdot Q(x) + R(x)$.
Temos: $R(x) = ax + b$.
$P(2) = (2^2 - 4)Q(x) + 2a + b \Rightarrow 2a + b = 13$
$P(-2) = [(-2)^2 - 4]Q(x) - 2a + b \Rightarrow -2a + b = 5$

e, resolvendo o sistema: a = 2; b = 9; R(x) = 2x + 9.
Portanto: R(1) = 11.

231. O quociente $Q(x)$ da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)^3$ tem grau $\delta Q = 4 - 3 = 1$; portanto, $Q(x) = ax + b$.
Temos:
$P(x) = (x - 2)^3(ax + b)$
$P(0) = -8 \Rightarrow -8(a \cdot 0 + b) = -8 \Rightarrow b = 1$
$P(1) = -3 \Rightarrow -1(a \cdot 1 + b) = -3 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow a = 2$
então:
$P(x) = (x - 2)^3(2x + 1)$ e $P(3) = (3 - 2)^3(2 \cdot 3 + 1) = 7$

232. Seja $f = x^{2n} - a^{2n}$ e $g = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$.
Então:
$f(a) = a^{2n} - a^{2n} = 0$
$f(-a) = (-a)^{2n} - (-a)^{2n} = a^{2n} - a^{2n} = 0$.
Portanto: $x^{2n} - a^{2n}$ é divisível por $x^2 - a^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

234.

6	11	4	K	2	8	$-\frac{4}{3}$
6	3	0	K	$2 - \frac{4K}{3}$	$\frac{16K}{9} + \frac{16}{3}$	

$$r = 0 \Rightarrow \frac{16K}{9} + \frac{16}{3} = 0 \Rightarrow K = -3.$$

238. Seja $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $ax - b$. Se $P(r) = R$, temos:
$P(x) = Q(x)(ax - b) + R$
$P(r) = Q(r)(ar - b) + R \Rightarrow ar - b = 0 \Rightarrow r = \frac{b}{a}$.

242. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$ e $g(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$.
$f(-1) = 1 - 4 + 4 + 1 - 2 = 0$
$f(-2) = 16 - 32 + 16 + 2 - 2 = 0$
então $f(x)$ é divisível por $x + 1$ e $x + 2$, portanto é divisível por $g(x)$.

243. $f(x) = (x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.
Se $f(x)$ é divisível por $x - 1$ e $x - 2$, $f(x)$ será divisível por $g(x)$.
Temos:
$f(1) = [(1 - 2)^2]^n + (1 - 1)^n - 1 = 1^n + 0 - 1 = 0$
$f(2) = (2 - 2)^{2n} + (2 - 1)^n - 1 = 0 + 1^n - 1 = 0$
Portanto: $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ é divisível por $x^2 - 3x + 2$.

245. $f = x^3 + px + q$ é divisível por $g = (x - 2)(x + 1)$, se f for divisível por $x - 2$ e $x + 1$, isto é, $f(2) = 0$ e $f(-1) = 0$.
Então:
$f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 8 + 2p + q \Rightarrow 2p + q = -8$
$f(-1) = 0 \Rightarrow f(-1) = -1 - p + q \Rightarrow -p + q = 1$.
Resolvendo o sistema, temos: $p = -3$ e $q = -2$.

246. Sejam $f = ax^{2n} + bx^{2n-1} + c$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ e $g = x(x + 1)(x - 1)$. f é divisível por g se f é divisível por $(x - 0)$, $(x + 1)$ e $(x - 1)$, isto é:
$f(0) = c = 0$
$f(-1) = a - b + c = 0$
$f(1) = a + b + c = 0$
Resolvendo o sistema de equações, temos: $a = b = c = 0$.

247. Sejam $f = 5x^6 - 6x^5 + 1$ e $g = (x - 1)^2$. Aplicando o algoritmo de Briot:

5	−6	0	0	0	0	1	1
5	−1	−1	−1	−1	−1	$0 = r_1$	1
5	4	3	2	1	$0 = r_2$		

Temos, então: $r_1 = r_2 = 0$ e, portanto, f é divisível por g e $q = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

248. Sejam $f = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ e $g = (x - 1)^2$. Aplicando Briot:

		n − 1 zeros						
n	−n − 1	0	0	0	...	0	1	1
n	−1	−1	−1	−1		−1	0	1
n	n − 1	n − 2	n − 3	n − 4	... 1	0		

Temos: $r_1 = r_2 = 0$ e, portanto, f é divisível por g.

249. Sejam $f = ax^{n+1} + bx^n + 1$ e $g = (x - 1)^2$. Aplicando Briot:

		n − 1 zeros					
a	b	0	0	...	0	1	1
a	a + b	a + b	a + b	...	a + b	a + b + 1	1
a	2a + b	3a + 2b	4a + 3b	...	a(n + 1) + bn		

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a(n + 1) + bn = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $\begin{cases} a = n \\ b = -n - 1 \end{cases}$

250. $f(x) = x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1$

I) Para que $f(x)$ seja divisível por $x - 1$, devemos ter:
$f(1) = 1 - a + b - b + 2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 2.$
Para $a = 2$, temos $f(x) = x^5 - 2x^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1.$
Vamos dividir $f(x)$ por $x - 1$ aplicando Briot:

1	−2	b	−b	2	−1	1
1	−1	b − 1	−1	1	0	

então $f(x) = (x - 1)\underbrace{(x^4 - x^3 + (b - 1)x^2 - x + 1)}_{q_1(x)}.$

II) Para que $q_1(x)$ seja divisível por $x - 1$, devemos ter:
$q_1(1) = 1 - 1 + (b - 1) - 1 + 1 = 0 \Rightarrow b = 1.$
Para $b = 1$, temos $f(x) = (x - 1)\underbrace{(x^4 - x^3 - x + 1)}_{q_1(x)}.$
Vamos dividir $q_1(x)$ por $x - 1$ aplicando Briot:

1	−1	0	−1	1	1
1	0	0	−1	0	

então $q_1(x) = (x - 1)(x^3 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1).$

III) Finalmente: $f(x) = (x - 1) \cdot q_1(x) = (x - 1)^3(x^2 + x + 1)$, então $f(x)$ é divisível por $(x - 1)^3$ e, como $x^2 + x + 1$ não é divisível por $x - 1$, vem $m = 3$.

255. Seja $P(x) = Q(x)(x + 1)(x - 2) + R(x)$, com $R(x) = ax + b$.
I) $P(-1) = 3 \Rightarrow R(-1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$
II) $P(2) = 3 \Rightarrow R(2) = 3 \Rightarrow 2a + b = 3$
Resolvendo o sistema, vem $a = 0$ e $b = 3$; portanto, $R(x) = 3$.

256. a) Dados os polinômios

$A(z) = a_m z^m + a_{m-1} \cdot z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \ (a_m \neq 0)$ e
$B(z) = b_n z^n + b_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0 \ (b_n \neq 0)$,
existem um único polinômio $Q(z)$ e um único polinômio $R(z)$ tais que
$Q(z) \cdot B(z) + R(z) = A(z)$ e $\delta R(z) < \delta B(z)$ (ou $R(z) = 0$).

b) $A(z) = Q(z) \cdot B(z) + R(z) = Q(z)(z^2 + 1) + R(z)$
$\delta R(z) < \delta B(z) = 2 \Rightarrow R(z) = az + b$
Temos:
$A(i) = Q(i)(i^2 + 1) + R(i) = Q(i)(-1 + 1) + ai + b = ai + b$ (I)
$A(-i) = Q(-i)[(-i)^2 + 1] + R(-i) = Q(-i)(-1 + 1) - ai + b =$
$= -ai + b$ (II)

Resolvendo o sistema de equações (I) e (II), temos:
$b = \dfrac{A(i) + A(-i)}{2}$ e $a = \dfrac{A(-i) - A(i)}{2} \cdot i$
e, portanto: $R(z) = \dfrac{A(i) + A(-i)}{2} + \dfrac{A(-i) - A(i)}{2} \cdot iz.$

257. Sejam q o quociente e r o resto da divisão de f por
$g = (x + 2)(x^2 + 4) = (x + 2)(x + 2i)(x - 2i)$. Temos, então:
$\delta r < \delta q = 3 \Rightarrow r = ax^2 + bx + c$
$f = qg + r = q \cdot (x + 2)(x + 2i)(x - 2i) + (ax^2 + bx + c)$
$f(-2) = 0 \Rightarrow 4a - 2b + c = 0$
$f(2i) = 2i + 1 \Rightarrow -4a + c + 2bi = 2i + 1$
$f(-2i) = -2i + 1 \Rightarrow -4a + c - 2bi = -2i + 1$
Resolvendo o sistema de equações, temos: $a = \dfrac{1}{8}$, $b = 1$ e $a = \dfrac{3}{2}$; portanto:
$r = \dfrac{1}{8}x^2 + x + \dfrac{3}{2}.$

258. $P(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 1) + R(x)$
$\delta R < 2 \Rightarrow R(x) = ax + b$
I) $R(2) = 9 \Rightarrow P(2) = 2a + b = 9$
II) $P(-1) = 0 \Rightarrow P(-1) = -a + b = 6$
(I) e (II) $\Rightarrow a = 1$ e $b = 7$ e $R(x) = x + 7$, e, portanto,
$P(x) = x^4 - 3x^2 + x + 3.$

Capítulo III — Equações polinomiais

263.

2	−6	4	0	0	1
2	−4	0	0	0	

$q_1 = 2x^3 - 4x^2 = 2x^2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2.$
Como x_4 é a maior das raízes, então $x_4 = 2$ e $5x_4^3 = 40.$

266. Se a e b são raízes do polinômio $P(x)$, então pelo teorema da decomposição temos:
$P(x) = a_n(x - a)(x - b)(x - r_1) \ldots (x - r_m)$, $a_n \neq 0$
e, portanto, $\delta P(x) \geqslant 2.$

274. Sendo $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x - 10$, notamos que $f(1) = -1 + 4 + 7 - 10 = 0.$
Então $f(x)$ é divisível por $x - 1$. Efetuada a divisão, obtemos:
$f(x) = (x - 1)(-x^2 + 3x + 10).$

As raízes da equação $-x^2 + 3x + 10 = 0$ são -2 e 5, então
$-x^2 + 3x + 10 = -(x + 2)(x - 5)$.
Finalmente: $f(x) = -(x - 1)(x + 2)(x - 5) = (1 - x)(x + 2)(x - 5)$.

275. a) $6x^2 - 5xy + y^2 = 6x^2 - 3xy - 2xy + y^2 = 3x(2x - y) - y(2x - y) =$
$= (2x - y)(3x - y)$

b) $x^4 + 4 = (x^2 + 2i)(x^2 - 2i)$
As raízes da equação binômia $x^2 + 2i = 0$ são $1 - i$ e $-1 + i$, portanto:
$x^2 + 2i = (x - 1 + i)(x + 1 - i)$.
As raízes da equação binômia $x^2 - 2i = 0$ são $1 + i$ e $-1 - i$, portanto:
$x^2 - 2i = (x - 1 - i)(x + 1 + i)$.
Temos, então:
$x^4 + 4 = (x - 1 + i)(x + 1 - i)(x - 1 - i)(x + 1 + i)$.

276. Se $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ é divisível por
$g_1(x) = -2x^2 + \sqrt{5}\,x = -2x\left(x - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e por
$g_2(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$, então $p(x)$ admite como raízes os números 0, $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, -1 e 2.
A forma fatorada de $p(x)$ será:
$p(x) = a(x - 0)\left(x - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)(x + 1)(x - 2)(x - r)$.
Supondo que todos os coeficientes de $p(x)$ sejam reais, então r também é real, pois $x - r$ é o quociente de $p(x)$ por $a(x - 0)\left(x - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)(x + 1)(x - 2)$.
Conclusão: $p(x)$ tem 5 raízes reais.

277. Seja $B = A - xI$. Temos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x & 1 & 1 \\ 1 & 1 - x & 1 \\ 1 & 1 & 1 - x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det B = -x^3 + 3x^2 = -x^2(x - 3)$. Portanto: $S = \{0, 3\}$.

278. Todas as afirmações são verdadeiras.
a) Ver item 39.
b) Ver item 41.
c) Ver item 87.

286. Aplicando Briot:

1	−4	8	−16	16	2
1	−2	4	−8	0	2
1	0	4	0		

Temos $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = (x - 2)^2(x^2 + 4)$.
Recaímos em $x^2 + 4 = 0$, cujas raízes são $x = 2i$ ou $x = -2i$. Portanto:
$S = \{2, 2i, -2i\}$.

289. Aplicando Briot sucessivas vezes:

1	−1	−3	5	−2	1
1	0	−3	2	0	1
1	1	−2	0		1
1	2	0			1
1	$3 \neq 0$				

Então, $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^3(x + 2)$. Portanto, 1 é raiz tripla.

290. Vamos dividir $P(x)$ por $x - 1$ utilizando Briot:

−1	−1	1	1	1
−1	−2	−1	0	

Resulta $P(x) = (x - 1)(-x^2 - 2x - 1)$.
Resolvendo $-x^2 - 2x - 1$, temos $x_1 = x_2 = -1$ e daí $x_1 \cdot x_2 = 1$.

291. $x^4 - 20x^2 + 36 = (x^2 - 2)(x^2 - 18)$
$= (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 3\sqrt{2})(x - 3\sqrt{2})$
Então as raízes $-3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ formam, nessa ordem, uma P.A. de razão $2\sqrt{2}$. Portanto, a proposição correta é *c*.

292. $x = 2$ é raiz dupla de $P(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24$. Aplicando Briot:

−1	11	−38	52	−24	2
−1	9	−20	12	0	2
−1	7	−6	0		

Recaímos em $-x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 6$.
Como $f(x) = \log [P(x)] \Rightarrow P(x) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -(x - 2)^2(x - 1)(x - 6) > 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 6) < 0$ e $x \neq 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < x < 2$ ou $2 < x < 6$ e, portanto,
$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6, x \neq 2\}$.

293. $x = -2$ é raiz dupla de $2x^3 + 7x^2 + 4x + K = 0$. Aplicando Briot:

2	7	4	K	−2
2	3	−2	K + 4	−2
2	−1	0	r_1	

$r_1 = 0 \Rightarrow K + 4 = 0 \Rightarrow K = -4$
Portanto: $K = -4$.

294. Zero é raiz dupla de $x^4 + (3a - b)x^3 + (2b - 4)x^2 + (ab + 4)x + a + b = 0$.
Aplicando Briot:

1	$3a - b$	$2b - 4$	$ab + 4$	$a + b$	0
1	$3a - b$	$2b - 4$	$ab + 4$	$\underbrace{a + b}_{r_1}$	0
1	$3a - b$	$2b - 4$	$\underbrace{ab + 4}_{r_2}$		

$$r_1 = r_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ ab + 4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $a = 2$ e $b = -2$.

295. A equação admite duas, e apenas duas, raízes nulas. Aplicando Briot:

1	-5	4	-3	2	$m - 5n$	$\frac{3}{5}m - n + 2$	$5 - m \cdot n$	0
1	-5	4	-3	2	$m - 5n$	$\frac{3}{5}m - n + 2$	$\underbrace{5 - m \cdot n}_{r_1}$	0
1	-5	4	-3	2	$m - 5n$	$\underbrace{\frac{3}{5}m - n + 2}_{r_2}$		

$$r_1 = r_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5 - m \cdot n = 0 \\ \frac{3}{5}m - n + 2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $m = -5$ e $n = -1$ ou $m = \frac{5}{3}$ e $n = 3$. Se $m = -5$ e $n = -1$, a equação admite mais que duas raízes nulas. Portanto: $m = \frac{5}{3}$ e $n = 3$.

296. Zero é raiz de multiplicidade 3 da equação. Aplicando Briot:

1	-3	4	$12b + \frac{a}{3}$	$a - 3b + 13$	$ab + 4$	0
1	-3	4	$12b + \frac{a}{3}$	$a - 3b + 13$	$\underbrace{ab + 4}_{r_1}$	0
1	-3	4	$12b + \frac{a}{3}$	$\underbrace{a - 3b + 13}_{r_2}$		0
1	-3	4	$\underbrace{12b + \frac{a}{3}}_{r_3}$			

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} ab = -4 \\ a - 3b + 13 = 0 \\ 12b + \frac{a}{3} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $a = -12$; $b = \frac{1}{3}$ e, portanto:

$a + b = -\frac{35}{3}$.

297. 2 é raiz dupla. Aplicando Briot:

1	$-4 - m$	$4 + 4m$	$-4m$	2
1	$-2 - m$	$2m$	0	2
1	$-m$	0		2
1	$2 - m$			

Então: se $m = 2$, a equação algébrica admite 2 como raiz tripla. Logo, $m \neq 2$.

301. Pelas relações de Girard, temos:

I) $ab + bc + ac = \frac{a_1}{a_3} = 3$

II) $abc = -\frac{a_0}{a_3} = 4$

Portanto: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{3}{4}$

302. Pelas relações de Girard, temos:

I) $ab + bc + ac = 4$

II) $abc = 1$

em que a, b, c são raízes da equação dada.

Portanto: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = 4$.

303. Pelas relações de Girard:

I) $a + b + c + d = \frac{7}{2}$

II) $abcd = 1$

$$E = \frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc}$$

$$E = \frac{a + b + c + d}{abcd} = \frac{7}{2}.$$

305. Pelas relações de Girard:

I) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -5$

II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = -11$

Então:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) =$$
$$= (-5)^2 - 2(-11) = 25 + 22 = 47.$$

307. I) $L + M + N + P = -q$

II) $LM + LN + LP + MN + MP + NP = r$

III) $LMNP = t$

Então:

$$\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN} =$$

$$\frac{L^2}{LMNP} + \frac{M^2}{LMNP} + \frac{N^2}{LMNP} + \frac{P^2}{LMNP} =$$

$$\frac{1}{LMNP}[(L + M + N + P)^2 - 2(LM + LN + LP + MN + MP + NP)] =$$

$$\frac{1}{t}[(-q)^2 - 2r] = \frac{q^2 - 2r}{t}.$$

308. I) $a + b + c = 0$

II) $ab + ac + bc = 1$

III) $abc = 1$

Então:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = \frac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}{abc} =$$

$$\frac{1}{abc}[(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c)] =$$

$$\frac{1}{1}[1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0] = 1 \text{ e } \log\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) = \log 1 = 0.$$

309. I) $a + b + c = 0$

II) $abc = -20$

$$\begin{aligned}(a + b + c)^3 &= [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3ac(a + c) + 3bc(b + c) + 6abc = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - 3abc - 3abc + 6abc = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\end{aligned}$$

Portanto: $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 + 3abc$

$a^3 + b^3 + c^3 = 0 + 3(-20) = -60$

310. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 4$

II) $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -6$

III) $r_1 = r_2 + r_3$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I): $2r_1 = 4 \Rightarrow r_1 = 2$.

Portanto: (II) $r_2 \cdot r_3 = -3$; (III) $r_2 + r_3 = 2$ e r_2 e r_3 são raízes da equação

$y^2 - 2y - 3 = 0$, ou seja, $r_2 = 3$ e $r_3 = -1$.

Chequemos com a relação de Girard não utilizada:

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 6 - 2 - 3 = 1 = \frac{a_1}{a_3} \text{ (confere).}$$

Então: $S = \{-1, 2, 3\}$.

311. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 9$

II) $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 12$

III) $r_1 = 2(r_2 + r_3)$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I): $3r_1 = 18 \Rightarrow r_1 = 6$.

Portanto: (II) $r_2 \cdot r_3 = 2$; (III) $r_2 + r_3 = 3$ e r_2 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 3y + 2 = 0$, isto é, $r_2 = 1$ e $r_3 = 2$.

Checando: $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 20 = \frac{a_1}{a_3}$ (confere).

Logo: $S = \{1, 2, 6\}$.

312. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 5$

II) $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -8$

III) $r_1 = 4(r_2 + r_3)$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I), temos: $5r_1 = 20 \Rightarrow r_1 = 4$.

Portanto: (II) $r_2 \cdot r_3 = -2$; (III) $r_2 + r_3 = 1$ e r_2 e r_3 são raízes da equação $y^2 - y - 2 = 0$, isto é, $r_2 = -1$ e $r_3 = 2$.

Checando: $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 4(-1) + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = 2 = \frac{a_1}{a_3}$ (confere).

Logo: $S = \{-1, 2, 4\}$.

313. I) $a + b + c = 2$

II) $abc = -18$

III) $c = -a$ e $a > 0$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I), temos: $a + b + (-a) = 2 \Rightarrow b = 2$.

Substituindo (III) em (II), temos: $a \cdot 2 \cdot (-a) = -18 \Rightarrow a^2 = 9$.

Como $a > 0$, temos $a = 3$ e, então, $c = -3$.

Checando: $ab + bc + ca = 3 \cdot 2 + 2(-3) + (-3)3 = -9 = \frac{a_1}{a_3}$ (confere).

Conclusão: $a + b = 5$.

314. I) $a + b + c = 10$

II) $abc = 30$

III) $b = c - a$ e $a < b < c$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I), temos: $c = 5$.

Portanto: (II) $ab = 6$; (I) $a + b = 5$ e a, b são raízes da equação $y^2 - 5y + 6 = 0$, isto é, $a = 2$ e $b = 3$.

Checando: $ab + bc + ca = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 31 = \frac{a_1}{a_3}$. (confere)

Então: $a - b + c = 4$.

Obs.: Se a condição (III) for imposta de outro modo: $c = b - a$ ou $a = b - c$, a solução encontrada fica incompatível com $a < b < c$.

315. I) $a + b + c = -2$

II) $abc = 2$

III) $a + c = -1$ e $a < b < c$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I), temos: $b = -1$.

Portanto: (II) $ac = -2$; (III) $a + c = -1$ e a e c são raízes da equação $y^2 + y - 2 = 0$, isto é, $a = -2$ e $c = 1$.

Checando: $ab + bc + ca = (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) =$

$= -1 = \frac{a_1}{a_3}$ (confere).

Logo, $a + 2b + c = -3$.

316. I) $r_1 + r_2 + r_3 = -4$

II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = -11$

III) $r_1 + r_2 = -7$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I), temos: $r_3 = 3$.

Portanto: (II) $r_1r_2 = 10$; (III) $r_1 + r_2 = -7$ e r_1 e r_2 são raízes de $y^2 + 7y + 10 = 0$, isto é, $r_1 = -2$ e $r_2 = -5$.

Então: $S = \{-5, -2, 3\}$.

317. I) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -4$

II) $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = 9$

III) $r_1 = r_2$ e $r_3 = r_4$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I) e (II), temos: (I) $r_1 + r_3 = -2$; (II) $r_1r_3 = \pm 3$.

Portanto: de (I) e (II), temos que r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 + 2y \pm 3 = 0$, isto é, ($r_1 = 1$ e $r_3 = -3$), ou ($r_1 = -1 + i\sqrt{2}$ e $r_3 = -1 - i\sqrt{2}$).

Checando com $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{a_2}{a_4} = -2$, temos:

$S = \{-3, 1\}$.

318. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 10$

II) $r_1r_2r_3 = 30$

III) $r_1 = r_2 - r_3$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I), temos: $2r_2 = 10 \Rightarrow r_2 = 5$.

Portanto: (II) $r_1r_3 = 6$; (I) $r_1 + r_3 = 5$ e r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 5y + 6 = 0$, isto é, $r_1 = 2$ e $r_3 = 3$.

Checando: $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 10 + 6 + 15 = 31 = \frac{a_1}{a_3}$.

Logo: $S = \{2, 3, 5\}$.

319. I) $r_1 + r_2 + r_3 = -5$

II) $r_1r_2r_3 = 36$

III) $r_1 = r_2r_3$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (II), temos: $r_1^2 = 36 \Rightarrow r_1 = \pm 6$.

Portanto:

a) se $r_1 = 6$, temos:

(II) $r_2r_3 = 6$; (I) $r_2 + r_3 = -11$ e r_2 e r_3 são raízes da equação

$y^2 + 11y + 6 = 0 \Rightarrow r_2 = \frac{-11 - \sqrt{97}}{2}$ e $r_3 = \frac{-11 + \sqrt{97}}{2}$

b) se $r_1 = -6$, temos:

(II) $r_2r_3 = -6$; (I) $r_2 + r_3 = 1$ e r_2 e r_3 são raízes da equação $y^2 - y - 6 = 0$, isto é, $r_2 = -2$ e $r_3 = 3$.

Checando: $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = -12$. A 1ª solução não convém. Logo: $S = \{-6, -2, 3\}$.

320. I) $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{16}{3}$

II) $r_1r_2r_3 = 2$

III) $r_1r_2 = 1$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (II), temos: $r_3 = 2$.

Portanto, (I) $r_1 + r_2 = \frac{10}{3}$; (III) $r_1r_2 = 1$ e r_1 e r_2 são raízes da equação

$3y^2 - 10y + 3 = 0$, isto é, $r_1 = \frac{1}{3}$ e $r_2 = 3$.

Checando: $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{2}{3} + 6 + 1 = \frac{23}{3}$ (confere). Logo:

$S = \left\{\frac{1}{3}, 2, 3\right\}$.

321. I) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{26}{5}$

II) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{32}{5}$

III) $r_1r_2r_3r_4 = -\frac{8}{5}$

IV) $r_1r_2 = 2$ (condição do problema)

Substituindo (IV) em (III), vem: (V) $r_3r_4 = -\frac{4}{5}$.

De (II) vem:

$r_1r_2(r_3 + r_4) + (r_1 + r_2)r_3r_4 = -\frac{32}{5} \Rightarrow 2(r_3 + r_4) - \frac{4}{5}(r_1 + r_2) = -\frac{32}{5}$.

Levando em conta que $r_1 + r_2 = \frac{26}{5} - (r_3 + r_4)$, temos:

$$2(r_3 + r_4) - \frac{4}{5}\left(\frac{26}{5} - r_3 - r_4\right) = -\frac{32}{5} \Rightarrow r_3 + r_4 = -\frac{4}{5}. \text{ (VI)}$$

As condições (V) e (VI) mostram que r_3 e r_4 são raízes da equação $5y^2 + 4y - 4 = 0$, isto é, $r_3 = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{5}$ e $r_4 = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{5}$.

Temos também $r_1r_2 = 2$ e $r_1 + r_2 = 6$; portanto, r_1 e r_2 são raízes da equação $y^2 - 6y + 2 = 0$, isto é, $r_1 = 3 - \sqrt{7}$ e $r_2 = 3 + \sqrt{7}$.

Conclusão: $S = \left\{3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}, \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{5}, \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{5}\right\}$.

322. I) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 2$
II) $r_1r_2 = 2$ e $r_1 + r_2 \neq 0$ (condição do problema)

Substituindo (II) em (I), temos: $r_3(r_1 + r_2) = 0 \overset{(II)}{\Rightarrow} r_3 = 0$.
Portanto, a terceira raiz é *0* (zero).

323. I) $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{19}{2}$
II) $r_1r_2r_3 = 7$
III) $r_1r_2 = 1$ (condição do problema)
Substituindo (III) e (II), temos: $r_3 = 7$.

Portanto: (I) $r_1 + r_2 = \frac{5}{2}$; (III) $r_1r_2 = 1$ e r_1 e r_2 são raízes da equação

$2y^2 - 5y + 2 = 0$, isto é, $r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = 2$.

Checando: $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 1 + \frac{7}{2} + 14 = \frac{37}{2}$ (confere).

Assim, a soma das duas maiores raízes é $2 + 7 = 9$.

324. I) $r_1 + r_2 + r_3 = -7$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = -6$
III) $\frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2}$ (condição do problema)

Substituindo (III) em (I) $\frac{5r_2}{2} + r_3 = -7$ e (II) $3r_2^2 + 5r_2r_3 = -12$, temos

$19r_2^2 + 70r_2 - 24 = 0 \Rightarrow r_2 = -4$ ou $r_2 = \frac{6}{19}$. Então:

a) se $r_2 = -4$, decorre $r_3 = 3$ e $r_1 = -6$

b) se $r_2 = \frac{6}{19}$, decorre $r_3 = -\frac{148}{19}$ e $r_1 = \frac{9}{19}$ (falso, pois

$r_1r_2r_3 = \frac{6}{19} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{-148}{19} \neq 72$). Portanto,

$S = \{-6, -4, 3\}$.

325. I) $r_1 + r_2 + r_3 = \frac{37}{5}$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 18$
III) $r_1r_2r_3 = \frac{72}{5}$
IV) $r_1 = \frac{2}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}$ ou $r_1(r_2 + r_3) = 2r_2r_3$ (condição do problema)

Substituindo (IV) em (II) $r_2r_3 = 6$. Então, (III) $r_1 = \frac{12}{5}$ e (I) $r_2 + r_3 = 5$.

De (I) e (II) temos que r_2 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 5y + 6 = 0$, isto é, $r_2 = 2$ e $r_3 = 3$ e, portanto:
$S = \left\{\frac{12}{5}, 3, 2\right\}$.

326. Sejam $S_1 = \{r, s, t\}$ e $S_2 = \{r, s, u\}$ os conjuntos solução das equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$, respectivamente. Então:

(I) $r + s + t = -a$	(IV) $r + s + u = 0$
(II) $rs + st + tr = 0$	(V) $rs + su + ur = b$
(III) $rst = -18$	(VI) $rsu = -12$

Fazendo (I) − (IV), temos: $t - u = -a$. (VII)

Fazendo (II) − (V), temos: $(r + s)(t - u) = -b \Rightarrow r + s = \frac{b}{a}$. (VIII)

Fazendo (III) : (VI), temos: $\frac{t}{u} = \frac{3}{2}$. (IX)

Resolvendo o sistema (VII) e (IX), vem $u = -2a$ e $t = -3a$.

Substituindo $t = -3a$ em (I) e (III), vem $r + s = 2a$ *(X)* e $rs = \frac{6}{a}$. (XI)

Substituindo (X) e (XI) em (II), vem:

$\frac{6}{a} + (-3a)(2a) = 0 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$ ou $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Comparando (VIII) e (X), vem $b = 2a^2$.

$b = 2a^2 = 2$ ou $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ (respectivamente)

327. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 0$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = m$
III) $r_1r_2r_3 = -2$
IV) $r_1 = r_2$ (condição do problema)
Substituindo (IV) em (I), vem $2r_1 + r_3 = 0$ e daí $r_3 = -2r_1$.
Substituindo em (III), vem $r_1 \cdot r_1 \cdot (-2r_1) = -2$ e daí $r_1^3 = 1$.
Então, há *3* soluções:

1.ª) $r_1 = r_2 = 1$ e $r_3 = -2$

$m = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 1 - 2 - 2 = -3$

2.ª) $r_1 = r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $r_3 = 1 - i\sqrt{3}$

$m = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + (1 + i\sqrt{3}) + (1 + i\sqrt{3}) = \dfrac{3 + i3\sqrt{3}}{2}$

3.ª) $r_1 = r_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ e $r_2 = 1 + i\sqrt{3}$

$m = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} + (-1 - i\sqrt{3}) + (-1 - i\sqrt{3}) = \dfrac{-3 - i3\sqrt{3}}{2}$

329. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 6$
II) $r_1r_2r_3 = 6$
III) $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 11$
IV) $r_1 + r_3 = 2r_2$ (condição do problema)
Substituindo (IV) em (I), resulta: $3r_2 = 6 \Rightarrow r_2 = 2$. Temos, então:
(IV) $r_1 + r_3 = 4$ e (II) $r_1r_3 = 3$ e, portanto, r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 4y + 3 = 0$, isto é, $r_1 = 1$ e $r_3 = 3$.
Checando: $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 2 + 6 + 3 = 11$ (confere).
$S = \{1, 2, 3\}$.

330. I) $a + b + c = -6$
II) $ab + bc + ca = 11$
III) $abc = -6$
IV) $2b = a + c$, $c > a$, $c > b$ (condição do problema)
Substituindo (IV) em (I), vem $3b = -6 \Rightarrow b = -2$. Então $a + c = -4$ e $ac = 3$, logo a e c são raízes da equação $y^2 + 4y + 3 = 0$, isto é, $a = -3$ e $c = -1$.
Checando: $ab + bc + ca = 6 + 2 + 3 = 11$ (confere).
Portanto, $a + b + 4c = -9$.

332. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 6$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = K$
III) $r_1r_2r_3 = -64$
IV) $r_1r_3 = r_2^2$ (condição do problema)
Substituindo (IV) em (III): $r_2^3 = -64 \Rightarrow r_2 = -4$.
Então: (IV) $r_1r_3 = 16$: (I) $r_1 + r_3 = 10$ e r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 - 10y + 16 = 0$, isto é, $r_1 = 2$ e $r_3 = 8$.
Temos, então: (II) $K = -24$.

334. I) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = 4$
III) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -6$

IV) $r_1r_2r_3r_4 = -21$
V) $r_1 = -r_2$ (condição do problema)
Substituindo (V) em (I), vem $r_3 + r_4 = 2$.
Substituindo (V) em (III), vem $r_1^2(r_3 + r_4) = 6$ e daí $r_1^2 = 3$.
Então: $r_1 = \sqrt{3}$ e $r_2 = -\sqrt{3}$ (ou vice-versa).
De (IV) vem $r_3r_4 = 7$, então r_3 e r_4 são raízes da equação $y^2 - 2y + 7 = 0$, isto é, $r_3 = 1 + i\sqrt{6}$ e $r_4 = 1 - i\sqrt{6}$.
Checando (II) $r_1r_2 + (r_1 + r_2)r_3 + (r_1 + r_2)r_4 + r_3r_4 = r_1r_2 + r_3r_4 = -3 + 7 = 4$ (confere).
Conclusão: $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{6}, 1 - i\sqrt{6}\}$.

335. I) $r_1 + r_2 + r_3 = \alpha$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \beta$
III) $r_1r_2r_3 = \gamma$
IV) $r_1 = -r_2$ (condição do problema)
Substituindo (IV) em:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & r_3 = \alpha \\ \text{(II)} & -r_1^2 = \beta \\ \text{(III)} & -r_1^2r_3 = \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \beta\alpha = \gamma$$

336. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 3$
II) $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = -4$
III) $r_1r_2r_3 = -12$
IV) $r_1 = -r_2$ (condição do problema)
Substituindo (IV) em (I), vem $r_3 = 3$.
De (III) vem $r_1r_2 = -4$, então r_1 e r_2 são as raízes da equação $y^2 - 4 = 0$, ou seja, $r_1 = 2$ e $r_2 = -2$.
Checando (II): $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = -4 - 6 + 6 = -4$ (confere).
$S = \{2, -2, 3\}$.

337. I) $r_1 + r_2 + r_3 = -h$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 2h + 1$
III) $r_1r_2r_3 = -1$
IV) $r_1 = -r_2$ (condição do problema)
Substituindo (IV) em (I): $r_3 = -h$; (II) $-r_1^2 = 2h + 1$; (III) $-r_1^2 \cdot r_3 = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -r_1^2 = \dfrac{1}{h}$. Então, $2h + 1 = \dfrac{1}{h} \Rightarrow 2h^2 + h - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = -1$ ou $h = \dfrac{1}{2}$.

338. I) $r_1 + r_2 + r_3 = a$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = b$
III) $r_1r_2r_3 = c$
IV) $r_1 = -r_2$ (condição do problema)

Substituindo (IV) em:
(I) $r_3 = a$
(II) $-r_1^2 = b$
(III) $-r_1^2 \cdot r_3 = c \Rightarrow -r_1^2 = \frac{c}{a}$. De (II) e (III): $b = \frac{c}{a} \Rightarrow ab = c$.

339. I) $\alpha + \beta + \gamma = p$
II) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$
III) $\alpha\beta\gamma = r$
IV) $\alpha + \beta = 0$
Substituindo (IV) em (I), resulta $\gamma = p$ e em (II) $\alpha\beta = q$.
Assim α e β são as raízes da equação $y^2 + q = 0$, isto é, $\alpha = \sqrt{-q}$ e $\beta = -\sqrt{-q}$.
Checando (III): $\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma = qp$, então $qp = r$ para que o problema tenha solução $S = \{\sqrt{-q}, -\sqrt{-q}, p\}$.

342. I) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \frac{28}{8}$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{18}{8}$
III) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{27}{8}$
IV) $r_1r_2r_3r_4 = -\frac{27}{8}$
V) $r_1 = r_2 = r_3$ (condição do problema)
Substituindo (V) em (I), vem $3r_1 + r_4 = \frac{7}{2}$. (VI)
Substituindo (V) em (II), vem $r_1^2 + r_1r_4 = \frac{3}{4}$. (VII)
Substituindo r_4 de (VI) em (VII), resulta
$8r_1^2 - 14r_1 + 3 = 0 \Rightarrow \left(r_1 = \frac{3}{2} \text{ ou } r_1 = \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \left(r_4 = -1 \text{ ou } r_4 = \frac{11}{4}\right)$.
Checando as condições (III) e (IV), vemos que só satisfaz a solução
$r_1 = r_2 = r_3 = \frac{3}{2}$ e $r_4 = -1$.

344. I) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -2$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = p$
III) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -q$
IV) $r_1r_2r_3r_4 = 2$
$\left.\begin{array}{l}\text{V) } r_1 + r_2 = -1 \\ \text{VI) } r_3 \cdot r_4 = 1\end{array}\right\}$ (condições do problema)
Substituindo (V) em (I), vem $r_3 + r_4 = -1$, então r_3 e r_4 são as raízes da equação $y^2 + y + 1 = 0$, ou seja, $r_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ e $r_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Substituindo (VI) em (IV), vem $r_1r_2 = 2$, então r_1 e r_2 são as raízes da equação $y^2 + y + 2 = 0$, ou seja, $r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ e $r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$.
De (II) vem $p = 4$.
De (III) vem $-q = -3$, portanto, $q = 3$.

346. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 0$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = -7$
III) $r_1r_2r_3 = -m$
IV) $r_1 = 2r_2$ (condição do problema)
Substituindo (IV) em (I) e (II):
(I) $3r_2 + r_3 = 0$ (1)
(II) $2r_2^2 + 3r_3 \cdot r_2 = -7$ (2)
De (1) e (2), temos: $r_2 = \pm 1$
a) se $r_2 = 1 \Rightarrow r_1 = 2; r_3 = -3$ e $m = 6$.
b) se $r_2 = -1 \Rightarrow r_1 = -2; r_3 = 3$ e $m = -6$.
Portanto, $m = 6$ e $S = \{1, 2, -3\}$ ou $m = -6$ e $S = \{-1, -2, 3\}$.

347. I) $r_1 + r_2 + r_3 = 0$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = p$
III) $r_1r_2r_3 = -q$
IV) $r_1 = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \Rightarrow r_1r_2r_3 = r_2 + r_3$ (condição do problema)
De (IV) e (III), resulta: $r_2 + r_3 = -q$. (3)
De (3) e (I), temos: $r_1 = q$. (1)
De (1) e (III): $r_2r_3 = -1$ e, portanto,
(II) $r_1(r_2 + r_3) + r_2r_3 = p \Rightarrow q(-q) + (-1) = p \Rightarrow q^2 + p + 1 = 0$.

348. I) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -p$
II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = q$
III) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -r$
IV) $r_1r_2r_3r_4 = s$

a) V) $r_1r_4 = r_2r_3$ (condição do problema)
Substituindo (V) em (III) e (IV), temos:
III) $r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = -r$ (3)
IV) $(r_2r_3)^2 = s$ (4)
De (I) e (3), resulta: $r_2r_3 = \frac{r}{p}$ e $(r_2r_3)^2 = \left(\frac{r}{p}\right)^2 = s$.
$r_2r_3p = r \Rightarrow r_2^2r_3^2p^2 = r^2 \overset{(4)}{\Rightarrow} sp^2 = r^2$

b) VI) $r_1 + r_4 = r_2 + r_3$ (condição do problema)
Substituindo (VI) em (I), temos:
$r_2 + r_3 = r_1 + r_4 = -\frac{p}{2}$. Então:

(II) $r_1r_4 + r_2r_3 + (r_1 + r_4)(r_2 + r_3) = q \Rightarrow r_1r_4 + r_2r_3 = q - \frac{p^2}{4}$

(III) $r_1r_4(r_2 + r_3) + r_2r_3(r_1 + r_4) = -r \Rightarrow r_1r_4 + r_2r_3 = \frac{2r}{p}$

e daí $q - \frac{p^2}{4} = \frac{2r}{p}$ e finalmente $p^3 - 4pq + 8r = 0.$

349. I) $r_1 + r_2 + r_3 = -2$

II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = p$

III) $r_1r_2r_3 = -8$

IV) $r_1r_3 = r_2^2$ (condição do problema)

Substituindo (IV) em (III): $r_2^3 = -8 \Rightarrow r_2 = -2$. Então:

(IV) $r_1r_3 = 4$ e (I) $r_1 + r_3 = 0$ e r_1 e r_3 são raízes da equação $y^2 + 4 = 0$, isto é, $r_1 = 2i$ e $r_3 = -2i$. Portanto,

(II) $2i(-2) + 2i(-2i) - 2(-2i) = p \Rightarrow p = 4$ e

$x^3 + 2x^2 + px + 8 = x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$; $S = \{-2, 2i, -2i\}$.

350. I) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -p$

II) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = 2$

III) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = 1$

IV) $r_1r_2r_3r_4 = q$

V) $r_3 + r_4 = 1$ e $r_1 = \frac{1}{r_2}$ (condição do problema)

Substituindo (V) nas anteriores, vem:

(I) $r_1 + r_2 = -p - 1$

(IV) $r_3r_4 = q$

(II) $r_1r_2 + (r_1 + r_2)(r_3 + r_4) + r_3r_4 = 2 \Rightarrow 1 + (-p - 1)(1) + q = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = p + 2$

(III) $r_1r_2(r_3 + r_4) + (r_1 + r_2)r_3r_4 = 1 \Rightarrow 1 \cdot 1 + (-p - 1)q = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q(p + 1) = 0 \Rightarrow (p + 2)(p + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} p = -2 \text{ e } q = 0 \\ p = -1 \text{ e } q = 1 \end{cases}$

351. I) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{8}{m}$

II) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{k}{m}$

III) $r_1r_2r_3r_4 = \frac{1}{m}$

IV) $r_1r_2 = -1$ e $r_3r_4 = -1$ (condição do problema)

Substituindo (IV) em (II) e (III), temos:

(II) $(-1)r_3 + (-1)r_4 + r_1(-1) + r_2(-1) = -\frac{k}{m}$

$-(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = \frac{8}{m} = -\frac{k}{m} \Rightarrow k = -8$

(III) $(-1)(-1) = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1$

Portanto, $m = 1$ e $k = -8$.

352. I) $a + b + c = 0$

II) $ab + ac + bc = -3$

III) $abc = -54$

Então,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{(abc)^2}[(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c)]$$

$$= \frac{1}{(-54)^2}[(-3)^2 - 2(-54) \cdot 0] = \frac{1}{2^2 \cdot 3^2}$$

Portanto: $\log\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \log\frac{1}{2^2 \cdot 3^2} = -\log 2^2 \cdot 3^2 =$

$= -(2 \log 2 + 4 \log 3).$

353. Se a e b são raízes da equação $x^2 - px + B^m = 0$, então:

I) $a + b = p$

II) $a \cdot b = B^m$

Temos:

II) $(a \cdot b)^a \cdot (a \cdot b)^b = (B^m)^a \cdot (B^m)^b \Rightarrow$

$a^a \cdot b^a \cdot a^b \cdot b^b = B^{m(a+b)} \Rightarrow$

$\log_B a^a \cdot b^a \cdot a^b \cdot b^b = \log_B B^{mp} \Rightarrow$

$\log_B a^a + \log_B b^a + \log_B a^b + \log_B b^b = mp$

$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = mp$

356. Se $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1 + i$ são as raízes do polinômio f de coeficientes reais, então f admite as raízes $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$ e $-1 - i$.

Logo, o grau mínimo do polinômio é 4.

357. Se o polinômio de coeficientes reais p possui três raízes, duas das quais são 0 e i, então o polinômio pode ser expresso:

$p = a(x - 0)(x - i)(x + i) = ax(x^2 + 1) = ax^3 + ax$ $(a \neq 0)$.

358. Se $1 + i$, $1 + i^2$ e $2 - i$ são raízes do polinômio p de coeficientes reais, então p admite as raízes: $1 + i$, $1 - i$, 0, $2 - i$ e $2 + i$.

Portanto, o grau do polinômio p é maior ou igual a 5.

359. Fazendo $x^2 = y$, temos:

$y^2 + 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1$ ou $y = -2$ e, portanto,

$x^2 = -1 \Rightarrow x = i$ ou $x = -i$

$x^2 = -2 \Rightarrow x = i\sqrt{2}$ ou $x = -i\sqrt{2}$
$S = \{i, -i, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$.

362. Se *1, 2* e *i* são raízes simples e *0* é raiz dupla de uma equação polinomial do 6º grau, então essa equação é:
$(x - 0)^2(x - 1)(x - 2)(x - i)(x + i) = 0$
$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$.

363. A equação algébrica $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$ admite *1* como raiz dupla e *i* como raiz simples. Então:
$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x - 1)^2(x - i)(x + i) =$
$= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
Temos: $a = b = c = 2$ e $d = 1$.

364. Se a equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$ admite $1 + i$ como raiz, então admite $1 - i$ como raiz. Temos:
$x^3 + mx^2 + 2x + n = (x - a)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$
$= x^2 + (a - 2)x^2 + (2 - 2a)x + 2a$
Então:
$$\begin{cases} m = a - 2 \\ 2 = 2 - 2a \Rightarrow a = 0 \\ n = 2a \end{cases}$$
e, portanto, $m = -2$ e $n = 0$.

365. A equação $2x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ admite a raiz $2 + i$, então admite $2 - i$ como raiz. Temos, então:
$2x^3 - 5x^2 + ax + b = k(x - m)(x - 2 - i)(x - 2 + i)$
$= kx^3 - k(4 + m)x^2 + k(5 + 4m) - 5km$
Então:
$$\begin{cases} k = 2 \\ -k(4 + m) = -5 \Rightarrow m = -\dfrac{3}{2} \\ k(5 + 4m) = a \Rightarrow a = -2 \\ -5km = b \Rightarrow b = 15. \end{cases}$$
Portanto, $a = -2$ e $b = 15$.

366. Se *i* é uma das raízes e tem multiplicidade *3*, então $-i$ também é raiz tripla. Seja *r* a sétima raiz. Temos:
$x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 1 =$
$= (x - r)(x - i)^3(x + i)^3 = (x - r)(x^2 + 1)^3 =$
$= (x - r)(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) =$
$= x^7 - rx^6 + 3x^5 - 3rx^4 + 3x^2 - 3rx^2 + x - r$
portanto $r = 1$ e $S = \{1, i, -i\}$.

367. Sejam *a, b* e *c* as raízes da equação do terceiro grau com coeficientes reais e, se $a = 1 + 2i$ e $b + c = 3 - 2i$, temos $b = 1 - 2i$ e $c = (3 - 2i) - (1 - 2i) = 2$ e, portanto,
$S = \{1 + 2i, 1 - 2i, 2\}$.

368. $P(x) = x^4 + Cx^2 + Dx + E$ (C, D, E reais)
$P(x) = Q(x) \cdot Q_1(x) + 15 = Q(x)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + 15$
Temos, então:
$grQ(x) = 1 \Rightarrow Q(x) = ax + b$
$P(X) = (ax + b)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + 15$
$= ax^4 + (2a + b)x^3 + (4a + 2b)x^2 + (8a + 4b)x + 8b + 15$
$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2 \\ 4a + 2b = C \Rightarrow C = 0 \\ 8a + 4b = D \Rightarrow D = 0 \\ 8b + 15 = E \Rightarrow E = -1 \end{cases}$$
e $P(x) = x^4 + 0x^2 + 0x - 1 = x^4 - 1$.
Como *i* é raiz de $P(x) = 0$, então $-i$ é raiz de $P(x)$. Temos:
$P(x) = (x - i)(x + i)(x^2 - 1) = 0$.
As outras raízes são *1* e -1.
$S = \{1, -1, i, -i\}$.

369. a) $P(x) = x^5 + 2x^3 + x + 1 = 0$
$P(1) = 5 > 0$; $P(2) = 51 > 0$. $P(1)$ e $P(2)$ têm mesmo sinal, então a equação pode ter *4* ou *2* ou nenhuma raiz real no intervalo dado. Como $P(x) > 0$ em $1 < x < 2$, não tem raiz que satisfaz $1 < r < 2$.
b) $P(x) = x^5 - 3x^2 + x - 4 = 0$
$P(1) = -5 < 0$; $P(2) = 18 > 0$. $P(1)$ e $P(2)$ têm sinais contrários, então a equação pode ter um número ímpar de raízes no intervalo dado. Como $P(x)$ é crescente em $1 < x < 2$, então admite ao menos uma raiz real que satisfaz $1 < r < 2$.
c) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 0$
$P(1) = 3 > 0$; $P(2) = 0$. Se $P(2) = 0$, então *2* é raiz de $P(x) = 0$. Logo, as outras raízes são *2* e $-\dfrac{1}{2}$. Como $1 < r < 2$, não existem raízes no intervalo dado.
d) $P(x) = x^3 - 9x + 4 = 0$
$P(1) = -5 < 0$; $P(2) = -6 < 0$. $P(1)$ e $P(2)$ têm mesmo sinal, a equação pode ter duas ou nenhuma raiz real no intervalo dado.
Como $P(x) < 0$ em $1 < x < 2$, não tem raiz nesse intervalo.
e) $P(x) = x^4 + \dfrac{2}{3} \cdot x^3 + x + 20 = 0$
$P(1) = \dfrac{68}{3} > 0$; $P(2) = \dfrac{130}{3} > 0$. $P(1)$ e $P(2)$ têm mesmo sinal, então a

equação pode ter 4, 2 ou nenhuma raiz no intervalo dado. Como $P(x) > 0$ em $1 < x < 2$, não tem raiz nesse intervalo.
Portanto, a alternativa correta é b.

370. Pelo teorema de Bolzano: $P(-1) > 0$ e $P(2) > 0$. $P(-1)$ e $P(2)$ têm mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais de $P(x) = 0$ em $]-1, 2[$ e, portanto, a alternativa correta é a.

371. Pelo teorema fundamental da álgebra: a equação admite ao menos uma raiz complexa $z = a + ib$, então admite $\bar{z} = a - ib$ como raiz. Portanto, a outra raiz é real.

372. $x^n - 1 = 0$, com n par e $n > 5$, é uma equação binômia. Suas n raízes são as n raízes enésimas de 1, dadas pela fórmula $z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$, com $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Para $k = 0$ temos $z_0 = 1$, para $k = \frac{n}{2}$ temos $z_{n/2} = -1$ e para os outros $n - 2$ valores temos z_k não real.
Então a alternativa a está correta.

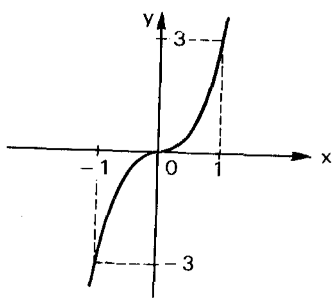
373. Dividindo $x^3 + 4x^2 + x - 6$ por $x - 1$, obtemos:
$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$
então as outras duas raízes são as raízes de $x^2 + 5x + 6 = 0$, isto é, -3 e -2; portanto, reais e negativas.

374. Se -1 é raiz de $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$, então as outras duas são raízes de $x^2 + mx + 9 = 0$. Temos, então:
$\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta = m^2 - 36 \geq 0 \Rightarrow (m - 6)(m + 6) \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m \leq -6$ ou $m \geq 6$.

376. $P(0) = -1 < 0$; $P(3) = -49 < 0$. $P(0)$ e $P(3)$ têm mesmo sinal, então $P(x) = 0$ pode ter duas ou nenhuma raiz no intervalo dado. Mas $P(x) < 0$ em $0 < x < 3$ e, portanto, não existe nenhuma raiz real.

377.

y	y = f(x)
−1	−3
0	0
1	3



$f(0) = 0 \Rightarrow 0$ é raiz.
Portanto: 1 raiz real.

378. $P(0) = \alpha$; $P(-2) = \alpha - 14$. Para que $P(x) = x^3 + x^2 + 5x + \alpha$ tenha ao menos uma raiz real em $]-2, 0[$, devemos ter $P(-2) \cdot P(0) < 0 \Rightarrow \alpha(\alpha - 14) < 0$ e, portanto, $0 < \alpha < 14$.

379. $P(2) = 6 - k$; $P(3) = 18 - k$. Para que $y = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tenha um zero entre 2 e 3 é necessário que $P(2) \cdot P(3) < 0 \Rightarrow (6 - k)(18 - k) < 0$ e, portanto, $6 < k < 18$.

380. Para que $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tenha um ou três zeros entre 1 e 2 é necessário que $P(1) \cdot P(2) < 0$. Temos, então:
$P(1) = 2 - k$; $P(2) = 6 - k \Rightarrow P(1) \cdot P(2) = (2 - k) \cdot (6 - k) < 0$ e, portanto, $2 < k < 6$.

381. Seja $P(x) = 2x^4 + bx^3 - bx - 2 = 0$. Temos: $P(1) = 0$ e $P(-1) = 0$.
Aplicando Briot:

2	b	0	−b	−2	1
2	2 + b	2 + b	2	0	−1
2	b	2	0		

e recaímos em $2x^2 + bx + 2 = 0$, que deverá ter duas raízes reais distintas entre si e distintas de 1 e -1. Então:
$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 16 > 0 \Rightarrow b < -4$ ou $b > 4$
$2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 \neq 0 \Rightarrow b \neq -4$
$2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 \neq 0 \Rightarrow b \neq 4$.
Conclusão: $b < -4$ ou $b > 4$.

382. Trata-se de um polinômio $f = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ de coeficientes reais (pois tem gráfico cartesiano) com uma raiz igual a -2 e outra igual a 3, então não poderá ter a terceira raiz complexa (pois admitiria também a sua conjugada). Alternativas a e c descartadas.
$f(0) = a_0 = -3 \Rightarrow$ alternativa b é correta.

383. O gráfico indica um polinômio de coeficientes reais que tem uma raiz dupla negativa, uma raiz simples igual a zero e uma raiz simples positiva; então o grau do polinômio é no mínimo 4. Como o polinômio tem limite $+\infty$ para $x \to +\infty$ e para $x \to -\infty$, então seu grau é par e seu coeficiente dominante é positivo; portanto, pode ser do 6º grau.

384. $P(-2) = -1$ e $P(-1) = 2 \Rightarrow P(-2) \cdot P(-1) < 0 \Rightarrow$ existe pelo menos uma raiz real no intervalo $]-2, -1[$.
$P(-1) = 2$ e $P(0) = -4 \Rightarrow P(-1) \cdot P(0) < 0 \Rightarrow$ existe pelo menos uma raiz real no intervalo $]-1, 0[$.
$P(0) = -4$ e $P(1) = -7 \Rightarrow P(0) \cdot P(1) > 0 \Rightarrow$ existe um número par de raízes reais no intervalo $]0, 1[$.

$P(1) = -7$ e $P(2) > 0 \Rightarrow P(1) \cdot P(2) < 0 \Rightarrow$ existe pelo menos uma raiz real no intervalo $]1, 2[$. Como P é um polinômio do 5º grau de coeficientes reais com duas raízes imaginárias, então P tem três raízes reais α, β e γ tais que $-2 < \alpha < -1$; $-1 < \beta < 0$ e $1 < \gamma < 2$.

389. O coeficiente dominante de $f = x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$ é unitário $(a_0 = 1)$. Então, se $f(x) = 0$ admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, essa raiz é necessariamente inteira, pois $q = 1$. Portanto, $f(x) = 0$ não admite raízes reais fracionárias e as eventuais raízes inteiras são os divisores de a_m.

390. Seja P(x) tal que $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$. Então:

$q = 1 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

$P(1) = 0$; $P(3) = 0$

1	−9	23	−15	1
1	−8	15	0	3
1	−5	0		

e recaímos em $x - 5 = 0$ ou $x = 5$. Portanto, $S = \{1, 3, 5\}$.

392. Seja P(x) tal que $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2\}$

$P(1) = 0$; $P(-1) = 0$; $P(2) = 0$. Então, $S = \{-1, 1, 2\}$.

393. Seja P(x) tal que $P(x) = x^5 - 8x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0$.

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$P(-1) = P(1) = P(2) = P(-3) = 0$; $P(-2) \neq 0$; $P(3) \neq 0$; $P(-6) \neq 0$ e $P(6) \neq 0$. Então, $S = \{-1, 1, 2, -3\}$.

397. Se a equação $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$ admite i como raiz, então $-i$ é também raiz da equação. Temos:

$4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = Q(x)(x - i)(x + i) = (4x - 3)(x^2 + 1)$ e $P\left(\frac{3}{4}\right) = 0$.

Portanto, a equação admite como raiz um número racional. Alternativa *b*.

398. Seja $P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$.

$\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 3\right\}$

$P(1) = P\left(\frac{1}{3}\right) = P(3) = 0$. Então, $S = \left\{1, \frac{1}{3}, 3\right\}$.

399. Seja $P(x) = 15x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = 0$.

$\frac{p}{q} \in \left\{\pm \frac{1}{15}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{3}, \pm 1\right\}$

$P(-1) = P\left(\frac{1}{5}\right) = P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. Portanto, $S = \left\{-1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right\}$.

400. Seja $P(x) = x^5 - x^4 - 82x^3 - 281x^2 - 279x - 198 = 0$.

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 11, \pm 18, \pm 22, \pm 33, \pm 66, \pm 99, \pm 198\}$

$P(-3) = P(-6) = P(11) = 0$. Aplicando Briot:

1	−1	−82	−281	−279	−198	−3
1	−4	−70	−71	−66	0	−6
1	−10	−10	−11	0		11
1	1	1	0			

e recaímos em $x^2 + x + 1 = 0$ ou $x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ e

$S = \left\{11, -3, -6, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

401. Seja $P(x) = x^6 + 8x^4 + 21x^2 + 60 = 0$.
$P(x) > 0, \forall x$, pois $x^6 \geqslant 0$, $x^4 \geqslant 0$ e $x^2 \geqslant 0$,
portanto, não possui nenhuma raiz inteira.

402. Seja $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$.

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$P(-3) = 0 \Rightarrow P(x) = (x + 3)(x^2 - 2x + 2) = 0$ e resolvendo a equação $x^2 - 2x + 2 = 0$, temos $x = 1 + i$ ou $x = 1 - i$ e, portanto,
$S = \{-3, 1 + i, 1 - i\}$.

403. As possíveis raízes racionais da equação $5x^3 - 37x^2 + 90x - 72 = 0$, em que todos os coeficientes são inteiros, são os números da forma $\frac{p}{q}$ em que

$q \in \{1, -1, 5, -5\}$ e

$p \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 24, -24, 36, -36, 72, -72\}$

Testando os números $\frac{p}{q}$ inteiros, encontramos a raiz $x = 2$. Aplicando Briot, temos:

5	−37	90	−72	2
5	−27	36	0	

As demais raízes são raízes de $5x^2 - 27x + 36 = 0$, ou seja, $x = 3$ ou $x = \frac{12}{5}$.

Conclusão: $S = \left\{2, 3, \frac{12}{5}\right\}$.

404. Seja $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ e, se i é a solução da equação, então $-i$ é também solução da equação. Temos:
$x^4 - 3x^2 - 4 = Q(x)(x - i)(x + i) = (x^2 - 4)(x^2 + 1)$ e, portanto, as outras raízes são reais, isto é, $x = 2$ ou $x = -2$.
Resposta: duas.

405. $(x - a)(x - b) = 0 \Rightarrow S_1 = \{a, b\}$, $a, b \in \mathbb{Q}$
$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow S_2 = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ e $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
Então, as duas equações não podem ter raízes comuns.

406. $4\binom{x}{3} - 5\binom{x}{2} = 5 \Rightarrow 4x^3 - 27x^2 + 23x - 30 = 0$

$\frac{p}{q} \in \left\{\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \ldots, \pm 30\right\}$

$P(6) = 0$. Aplicando Briot-Ruffini:

4	−27	23	−30	6
4	−3	5	0	

e recaímos em $4x^2 - 3x + 5 = 0$ ou $x = \frac{3 \pm i\sqrt{72}}{8} \notin \mathbb{N}$. Portanto, $S = \{6\}$.

407. $\frac{A_{x+2,\,4}}{A_{x-1,\,2}} = 70 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 68x + 140 = 0$

$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \ldots, \pm 140\}$

$P(5) = 0$. Aplicando Briot:

1	3	−68	140	5
1	8	−28	0	

e recaímos na equação $x^2 + 8x - 28 = 0$, isto é, $x = -4 \pm 2\sqrt{11}$.
Como $x \in \mathbb{N}$, temos que $S = \{5\}$.

408. a) $P(x) = \left(x - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(x - 5) = 0$
$= (x^2 - x + 1)(x - 5)$
$= x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$.

b) $(n + 1)^3 = (n - 2)^3 + (n - 1)^3 + n^3$ (condição do problema), então $n^3 - 6n^2 + 6n - 5 = 0$, n inteiro. Usando o item a, $n = 5$, e, portanto, os quatro inteiros consecutivos são: $3, 4, 5$ e 6.

409. Fazendo $2^{2x} = y$, a equação fica:
$y^4 + 14y^3 - 96y^2 - 896y + 2\,048 = 0$.
Pesquisando entre os divisores de $2\,048$ as raízes inteiras dessa equação, encontramos as raízes $2, 8, -8$ e -16. Daí vem:

$y = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 8 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$y = -8 \Rightarrow 2^{2x} = -8 \Rightarrow \nexists x$

$y = -16 \Rightarrow 2^{2x} = -16 \Rightarrow \nexists x$.

Conclusão: $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

410. Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, uma equação polinomial de coeficientes inteiros.
Se $P(x)$ admite como raiz o número irracional $a + \sqrt{b}$, então admite $a - \sqrt{b}$ como raiz.
Chamemos de $q = a + \sqrt{b}$ e $\bar{q} = a - \sqrt{b}$. Temos que $(\bar{q})^n = \overline{q^n}$.
Provemos que $\bar{q} = \overline{a + \sqrt{b}} = a - \sqrt{b}$ é raiz dessa equação, isto é, $P(\bar{q}) = 0$.

$P(\bar{q}) = a_n(\bar{q})^n + a_{n-1}(\bar{q})^{n-1} + \ldots + a_1(\bar{q}) + a_0$
$= a_n\overline{q^n} + a_{n-1}\overline{q^{n-1}} + \ldots + a_1\bar{q} + a_0$
$= \overline{a_nq^n} + \overline{a_{n-1}q^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1q} + \overline{a_0}$
$= \overline{a_nq^n + a_{n-1}q^{n-1} + \ldots + a_1q + a_0}$
$= \overline{P(q)} = \bar{0} = 0$

411. Se 1, 2 e $1 - \sqrt{2}$ são raízes de uma equação de coeficientes inteiros, temos:
$(x - 1)(x - 2)(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) = 0$
$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$

412. Se $1 + \sqrt{2}$ é raiz da equação $3x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2$, então $1 - \sqrt{2}$ é também raiz da equação. Temos, então:
$3x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2 = Q(x)(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$
$= (3x^2 + x - 2)(x^2 - 2x - 1)$

e resolvendo a equação $3x^2 + x - 2 = 0$, temos $x = -1$ ou $x = \frac{2}{3}$ e, portanto, $S = \left\{-1, \frac{2}{3}, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\right\}$.

413. $(x - 2)^3 = 4 - x \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 13x - 12 = 0$. Então:
$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

$P(3) = 0$ e dividindo a equação por $x - 3$ encontramos o quociente
$x^2 - 3x + 4 = 0$, ou seja, $x = \dfrac{3 + i\sqrt{7}}{2}$ ou $x = \dfrac{3 - i\sqrt{7}}{2}$.
Portanto, $S = \left\{3, \dfrac{3 + i\sqrt{7}}{2}, \dfrac{3 - i\sqrt{7}}{2}\right\}$.

Capítulo IV — Transformações

415.

$$\begin{array}{r|lll}
-2 & 3 & -4 & 2 \\ \hline
 & 3 & -10 & 22 = R_0 \\
 & 3 & -16 = R_1 & \\
 & 3 = R_2 & &
\end{array}$$

Portanto, $P(x) = 3(x + 2)^2 - 16(x + 2) + 22$.

416.

$$\begin{array}{r|llll}
1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ \hline
 & 2 & -1 & 3 & -2 = R_0 \\
 & 2 & 1 & 4 = R_1 & \\
 & 2 & 3 = R_2 & & \\
 & 2 = R_3 & & &
\end{array}$$

portanto, $y = 2(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 + 4(x - 1) - 2$ e o coeficiente de $(x - 1)^2$ é $R_2 = 3$.

417. A transformada aditiva é $R_2(x + a)^2 + R_1(x + a) + R_0 = 0$.
Aplicando Horner-Ruffini:

$$\begin{array}{r|lll}
-a & 5 & -3 & 8 \\ \hline
 & 5 & -5a - 3 & 5a^2 + 3a + 8 = R_0 \\
 & 5 & -10a - 3 = R_1 & \\
 & 5 = R_2 & &
\end{array}$$

Para que a equação seja desprovida do termo do primeiro grau, devemos ter:

$R_1 = 0 \Rightarrow -10a - 3 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{3}{10}$

$R_2 = 5$; $R_0 = 5\left(-\dfrac{3}{10}\right)^2 + 3\left(-\dfrac{3}{10}\right) + 8 = \dfrac{151}{20}$ e, portanto, $100y^2 + 151 = 0$.

419. Basta fazer a transformação multiplicativa $y = 2x$. Então:

$$5\left(\frac{y}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{y}{2}\right) - 2 = 0$$

$5y^3 - 8y^2 + 28y - 16 = 0$

420. Basta fazer a transformação multiplicativa $y = 4x$. Então:

$$\left(\frac{y}{4}\right)^3 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{4}\right) - 3 = 0$$

$y^3 - 4y^2 + 32y - 192 = 0$.

422. A transformada aditiva é:
$R_3(x - 2)^3 + R_2(x - 2)^2 + R_1(x - 2) + R_0 = 0$.
Aplicando Horner-Ruffini:

$$\begin{array}{r|llll}
2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ \hline
 & 2 & 3 & 7 & 13 = R_0 \\
 & 2 & 7 & 21 = R_1 & \\
 & 2 & 11 = R_2 & & \\
 & 2 = R_3 & & &
\end{array}$$

Portanto, $2y^3 + 11y^2 + 21y + 13 = 0$.

423. Seja $P_1(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$. Sendo em $y = x - h$ aditiva, temos
$P_2(y) = R_n \cdot y^n + R_{n-1} \cdot y^{n-1} + \ldots + R_1 y + R_0 = 0$, então para que P_2 admita raiz nula, deve-se ter $R_0 = P_1(h) = 0$, ou seja, h é raiz de P_1.

425. $P_1(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6 = 0$; $P_2(y) = y^3 + y - 4 = 0$ e $y = x + a$.
Aplicando Horner-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|llll}
-a & 1 & -3 & 4 & -6 \\ \hline
 & 1 & -a - 3 & a^2 + 3a + 4 & -a^3 - 3a^2 - 4a - 6 = R_0 \\
 & 1 & -2a - 3 & 3a^2 + 6a + 4 = R_1 & \\
 & 1 & -3a - 3 = R_2 & & \\
 & 1 = R_3 & & &
\end{array}$$

portanto,

$$\left\{\begin{array}{l} -a^3 - 3a^2 - 4a - 6 = -4 \\ 3a^2 + 6a + 4 = 1 \\ -3a - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1$$

Então, a relação de transformação é $y = x - 1$.

426. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; $y = x + k$ a relação de transformação. Temos:
A transformada aditiva é:
$R_3(x + k)^3 + R_2(x + k)^2 + R_1(x + k) + R_0 = 0$.

Aplicando Horner-Ruffini, vem:

$-k$	a	b	c	d
	a	$b - ak$	$ak^2 - bk + c$	$-ak^3 + bk^2 - ck + d = R_0$
	a	$b - 2ak$	$3ak^2 - 2bk + c = R_1$	
	a	$b - 3ak = R_2$		
	$a = R_3$			

Para não ocorrer o termo do segundo grau, devemos ter

$R_2 = 0 \Rightarrow b - 3ak = 0 \Rightarrow k = \dfrac{b}{3a}$

$R_3 = a$; $R_1 = 3a\left(\dfrac{b}{3a}\right)^2 - 2b\left(\dfrac{b}{3a}\right) + c = \dfrac{-b^2 + 3ac}{3a}$

$R_0 = -a\left(\dfrac{b}{3a}\right)^3 + b\left(\dfrac{b}{3a}\right)^2 - c\left(\dfrac{b}{3a}\right) + d = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}$.

Então: $27a^3y^3 + (27a^2c - 9ab^2)y + (2b^3 - 9abc + 27a^2d) = 0$.

434. $4x^6 - 21x^4 + 21x^2 - 4 = 0$

2ª espécie e grau par $\Rightarrow$ *1* e *−1* são raízes

4	0	−21	0	21	0	−4	1
4	4	−17	−17	4	4	0	−1
4	0	−17	0	4	0		

Recaímos em $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

Fazendo $x^2 = y$, vem $4y^2 - 17y + 4 = 0$ e daí

$y = \dfrac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow y = 4$ ou $y = \dfrac{1}{4}$

então $x = \pm 2$ ou $x = \pm\dfrac{1}{2}$.

Conclusão: $S = \left\{1, -1, 2, -2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

435. $ax^5 - bx^4 + (3b - 5a)x^3 - (3b - 5a)x^2 + bx - a = 0$.

Trata-se de uma equação de 2ª espécie e grau ímpar $\Rightarrow$ *1* é raiz.

a	$-b$	$3b - 5a$	$5a - 3b$	b	$-a$	1
a	$a - b$	$2b - 4a$	$a - b$	a	0	

Recaímos em $ax^4 + (a - b)x^3 + (2b - 4a)x^2 + (a - b)x + a = 0$

$\Rightarrow ax^2 + (a - b)x + (2b - 4a) + (a - b)\dfrac{1}{x} + a\dfrac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow$

$a\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + (a - b)\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + (2b - 4a) = 0 \Rightarrow$

$ay^2 + (a - b)y + (2b - 6a) = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-(a - b) \pm (5a - b)}{2a} \Rightarrow$

$y = 2$ ou $y = \dfrac{b - 3a}{2}$.

I) $x + \dfrac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$.

II) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{b - 3a}{2} \Rightarrow ax^2 + (3a - b)x + a = 0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{b - 3a \pm \sqrt{5a^2 - 6ab + b^2}}{2a}$.

$S = \left\{1, \dfrac{-3a + b + \sqrt{5a^2 - 6ab + b^2}}{2a}, \dfrac{-3a + b - \sqrt{5a^2 - 6ab + b^2}}{2a}\right\}$.

436. $x^6 + 8ax^5 + (b - 2)x^4 + (4a + b + c)x^3 + 2ax^2 + (b - 2a)x - 1 = 0$

$a_n = -a_0$, grau par $\Rightarrow$ 2ª espécie, par.

Então: $\left.\begin{array}{l} 8a = -(b - 2a) \\ b - 2 = -2a \\ 4a + b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \dfrac{-1}{2}$; $b = 3$; $c = -1$

Portanto: $x^6 - 4x^5 + x^4 - x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow$ 1 e −1 são raízes

Briot:

1	−4	1	0	−1	4	−1	1
1	−3	−2	−2	−3	1	0	−1
1	−4	2	−4	1	0		

Recaímos em $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 2 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 4$.

I) $x + \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$.

II) $x + \dfrac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

$S = \{1, -1, i, -i, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$.

437. 2ª espécie e grau ímpar: *1* é raiz.

1	−5	9	−9	5	−1	1
1	−4	5	−4	1	0	

$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 5 = 0 \Rightarrow$

$y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 3$.

I) $x + \dfrac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

II) $x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$S = \left\{1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

439. 1ª espécie: -1 é raiz.

2	−3	−3	2	−1
2	−5	2	0	

$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{-1, 2, \frac{1}{2}\right\}$.

440. 1ª espécie: -1 é raiz.

1	1	1	1	−1
1	0	1	0	

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$.

$S = \{-1, i, -i\}$.

441. $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0 \Rightarrow$

$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0 \Rightarrow$

$6y^2 + 35y + 50 = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{3}$ ou $y = -\frac{5}{2}$.

I) $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \Rightarrow x = -3$ ou $x = -\frac{1}{3}$.

II) $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -2$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

$S = \left\{-\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{3}, -3\right\}$.

442. a) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow$

$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \Rightarrow y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

I) $z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow z = \frac{-(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

II) $z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow z = \frac{-(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

b) Convém notar que $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$, portanto as

raízes de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ são as raízes de $z^5 - 1 = 0$, exclusão feita à raiz $z = 1$. As raízes imaginárias da equação binômia $z^5 = 1$ são dadas por

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{5} \text{ com } k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

e essas raízes estão em P.G. de razão $q = \cos\frac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$, pois os argumentos dos z_k estão em P.A. de razão $r = \frac{2\pi}{5}$; então:

$z_{p+1} = z_p \cdot q$ para todo $p \in \{1, 2, 3\}$.

Nota: Talvez seja interessante notar que:

$z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} = \frac{(\sqrt{5} - 1) + i \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

$z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{4\pi}{5} = \frac{-(\sqrt{5} + 1) + i \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

$z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{6\pi}{5} = \frac{-(\sqrt{5} + 1) - i \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

$z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{8\pi}{5} = \frac{(\sqrt{5} - 1) - i \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

443. 1ª espécie: -1 é raiz:

1	−4	1	1	−4	1	−1
1	−5	6	−5	1	0	

$y^4 - 5y^3 + 6y^2 - 5y + 1 = 0 \Rightarrow \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 5\left(y + \frac{1}{y}\right) + 6 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 1$.

I) $y + \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{3}$.

II) $y + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow y = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

$S = \left\{-1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

444. $\frac{1 + x^4}{(1 + x)^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y - 8 = 0 \Rightarrow$

$y = 2 \pm 2\sqrt{3}$

I) $x + \frac{1}{x} = 2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow x = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$

II) $x + \frac{1}{x} = 2 - 2\sqrt{3} \Rightarrow x = (1 - \sqrt{3}) \pm i\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$

$S = \{(1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}, (1 - \sqrt{3}) \pm i\sqrt{2\sqrt{3} - 3}\}$.

445. Seja a P.G. (a, aq, aq^2, aq^3, q^4). Devemos ter:

I) $a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 = 484$

II) $aq + aq^3 = 120$

Então:

$$\frac{1 + q + q^2 + q^3 + q^4}{q + q^3} = \frac{484}{120} \text{ e daí } 30q^4 - 91q^3 + 30q^2 - 91q + 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 91\left(q + \frac{1}{q}\right) + 30 = 0 \Rightarrow 30x^2 - 91x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ ou } x = -\frac{3}{10}$$

I) $q + \frac{1}{q} = \frac{10}{3} \Rightarrow \left(q = 3 \text{ ou } q = \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (a = 4 \text{ ou } a = 324)$

II) $q + \frac{1}{q} = -\frac{3}{10} \Rightarrow q \notin \mathbb{R}$

PG (4, 12, 36, 108, 324) ou (324, 108, 36, 12, 4).

446. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \frac{2}{3}.$$

I) $x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \pm i.$

II) $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 2i\sqrt{3}}{3}.$

$$S = \left\{i, -i, \frac{1 + 2i\sqrt{3}}{3}, \frac{1 - 2i\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

Capítulo V — Raízes múltiplas e raízes comuns

452. $P(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c$

a) $P(x) + k(x - 1)P'(x) + (x^2 - 1)P''(x) \equiv 0 \Rightarrow$

$5x^3 + ax^2 + bx + c + k(x - 1)(15x^2 + 2ax + b) + (x^2 - 1)\cdot(30x + 2a) \equiv 0 \Rightarrow$

$(35 + 15k)x^3 + (3a + 2ak - 15k)x^2 + (b + bk - 2ak - 30)x + (c - bk - 2a) \equiv 0,$

temos: $35 + 15k = 0 \Rightarrow k = -\frac{7}{3}.$

b) Substituindo $k = -\frac{7}{3}$, nas equações abaixo, temos:

I) $3a + 2ak - 15k = 0 \Rightarrow a = 21.$

II) $b + bk - 2ak - 30 = 0 \Rightarrow b = 51.$

III) $c - kb - 2a = 0 \Rightarrow c = -77$

c) $P(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c = 5x^3 + 21x^2 + 51x - 77$

$P(1) = 0 \Rightarrow P(x) = (x - 1)\cdot Q(x)$. Aplicando Briot:

5	21	51	−77	1
5	26	77	0	

Então: $Q(x) = 5x^2 + 26x + 77$ e

$P(x) = (x - 1)(5x^2 + 26x + 77).$

453. $P(x) = 3x^4 + 12x - 7 \Rightarrow P'(x) = 12x^3 + 12 \Rightarrow$

$P'(-1) = 12(-1)^3 + 12 = 0$ e, portanto,

$P'(-1) = 0.$

454. $P(x) = (x - a)\cdot P'(x) \Rightarrow P'(x)$ é quociente da divisão de $P(x)$ por $x - a \Rightarrow$ coeficientes dominantes de $P(x)$ e $P'(x)$ são iguais (basta lembrar o dispositivo de Briot). Então:

$a_n = n \cdot a_n$ e daí $a_n(n - 1) = 0 \Rightarrow n = 1.$

455. $a_n = 1$ e $a_0 = 2p - 1$ e o polinômio tem grau par, então:

$$\begin{cases} P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + (2p - 1) \\ P'(x) = 2nx^{2n-1} + (2n - 1)a_{2n-1}x^{2n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1 \end{cases}$$

a) $P(0) = 2p - 1$ é um número ímpar.

b) $P(0) = 2p - 1 \neq 0$. Zero não é raiz de $P(x)$.

c) $\delta P'(x) = 2n - 1 \Rightarrow \delta P'(x)$ é ímpar.

d) O coeficiente do termo de maior grau do polinômio derivado é $2n$, logo é par.

e) O valor de $P(x)$, quando x é número par, é a soma de parcelas do tipo a_ix^i com a_i inteiro. Essas parcelas são todas pares, com exceção da última $2p - 1$. Então a soma é diferente de zero.

Portanto, *d* é a afirmação falsa.

458. $f(x) = x^3 - 3x + 8 = 0.$

A equação tem raízes iguais se aceitar como raiz uma raiz de $f'(x) = 0$, então:

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. $f(1) \neq 0$; $f(-1) \neq 0$ e, portanto, a equação não tem raízes iguais.

459. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$

$f^{(1)}(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 14x + 8$

$f^{(2)}(x) = 20x^3 - 24x^2 + 18x - 14 \left(\text{raízes: } 1, \frac{1 \pm \sqrt{69}}{10}\right)$

$f^{(3)}(x) = 60x^2 - 48x + 18 \left(\text{raízes: } \frac{4 \pm i\sqrt{14}}{10}\right)$

$f^{(4)}(x) = 120x - 48 \left(\text{raiz: } \frac{2}{5}\right)$

I) Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(4)}(r) = 0$, então r tem multiplicidade 5. Mas $f(r) = f\left(\frac{2}{5}\right) \neq 0$.

II) Se r for raiz de multiplicidade 4, então $f(x) = f^{(3)}(r) = 0$. Mas $f(x) = f\left(\frac{4 \pm i\sqrt{14}}{10}\right) \neq 0$.

III) Se r for de multiplicidade 3, então $f(r) = f^{(2)}(r) = 0$.
$f^{(3)}(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 - 24x^2 + 18x - 14 = 0$
Pesquisando as raízes, encontramos $f(1) = 0$.
Checando: $f^{(1)}(1) = 5 - 8 + 9 - 19 + 8 = 0$.
Logo, 1 é raiz tripla.

460. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$; $f^{(1)}(x) = 3x^2 - 10x + 8$;
$f^{(2)}(x) = 6x - 10$; $f^{(3)}(x) = 6 \neq 0$
Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz tripla.

$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 6x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$; mas $f\left(\frac{5}{3}\right) \neq 0$.

$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = \frac{4}{3}$

$f(2) = 0$, então 2 é raiz dupla. Aplicando Briot:

1	−5	8	−4	2
1	−3	2	0	2
1	−1	0		

recaímos em $x - 1 = 0$; portanto, $S = \{1, 2\}$.

461. a) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64 = 0$.
$f^{(1)}(x) = 4x^3 - 36x^2 + 104x - 96$
$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 72x + 104$
$f^{(3)}(x) = 24x - 72$; $f^{(4)}(x) = 24 \neq 0$. Temos, então:
$f^{(3)}(x) = 0 \Rightarrow 24x - 72 = 0 \Rightarrow x = 3$, mas $f(3) \neq 0$.

$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 72x + 104 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{3}}{3}$ e $f\left(\frac{9 \pm \sqrt{3}}{3}\right) \neq 0$.

$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 36x^2 + 104x - 96 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 4$
Testando essas raízes em $f(x)$, encontramos $f(2) = 0$ e $f(4) = 0$.
Portanto, 2 e 4 são raízes duplas.

b) $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$
$f^{(1)}(x) = 5x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 2x + 8$
$f^{(2)}(x) = 20x^3 + 12x^2 - 30x - 2$
$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 + 12x^2 - 30x - 2 = 0$.
Uma das raízes da equação $f^{(2)}(x) = 0$ é 1.

Testando em $f(x)$ e $f^{(1)}(x)$, temos:
$f(1) = 0$ e $f^{(1)}(1) = 0$, então 1 é raiz tripla. Aplicando Briot-Ruffini:

1	1	−5	−1	8	−4	1
1	2	−3	−4	4	0	1
1	3	0	−4	0		1
1	4	4	0			

recaímos em $x^2 + 4x + 4 = 0$ e daí $x = -2$ com multiplicidade 2 e, portanto, 1 é raiz tripla e -2 é raiz dupla.

462. $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$.
$f^{(1)}(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$
$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 6x - 6$.
Se a equação admite uma raiz de multiplicidade 3, então deve existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$. Então:

$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$; $f(1) = 0$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Assim, 1 é raiz tripla. Aplicando Briot:

1	−1	−3	5	−2	1
1	0	−3	2	0	1
1	1	−2	0		1
1	2	0			

recaímos em $x + 2 = 0$ e daí $x = -2$.
$S = \{1, -2\}$.

466. $x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda = 0$
a) Se a equação admite uma raiz dupla, então existe um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$. Então:

$f^{(1)}(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$ e
I) $f(-1) = 0 \Rightarrow 5 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -5$.
II) $f(3) = 0 \Rightarrow -27 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 27$.

467. Vamos supor que a equação $f(x) = x^4 + px^2 + q = 0$ tenha uma raiz r tripla. Então deveremos ter $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$.
$f^{(1)} = 4x^3 + 2px$

$f^{(2)}(x) = 12x^2 + 2p = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{p}{6} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{p}{6}}$

Substituindo esse valor em $f(x) = 0$ e $f^{(1)}(x) = 0$, temos:

$\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{6}}\right)^4 + p\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{6}}\right)^2 + q = 0 \Rightarrow 5p^2 = 36q$

$$4\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{6}}\right)^3 + 2p\left(\pm\sqrt{-\frac{p}{6}}\right) = 0 \Rightarrow p = 0$$

portanto a condição para a existência de uma raiz tripla é $p = q = 0$ (absurdo).

468. $f(x) = x^3 + px + q = 0;\ f^{(1)}(x) = 3x^2 + p;\ f^{(2)}(x) = 6x;\ f^{(3)}(x) = 6.$

Então, se existir um número r tal que:

a) $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$, teremos uma raiz tripla, ou seja:

$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0.$

$f(0) = 0 \Rightarrow q = 0$ e $f^{(1)}(0) = 0 \Rightarrow p = 0.$

b) $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla, ou seja:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + p = 0 \Rightarrow x = \pm i\frac{\sqrt{3p}}{3}$$

$$f\left(i\frac{\sqrt{3p}}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(i\frac{\sqrt{3p}}{3}\right)^3 + p\left(i\frac{\sqrt{3p}}{3}\right) + q = 0 \Rightarrow 2ip\sqrt{3p} = -9q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2ip\sqrt{3p})^2 = (-9q)^2 \Rightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Analogamente,

$$f\left(-i\frac{\sqrt{3p}}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

469. $f(x) = x^3 - px - q = 0.\ f^{(1)}(x) = 3x^2 - p;\ f^{(2)}(x) = 6x.$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla. Então:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - p = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3p}}{3}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3p}}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3p}}{3}\right)^3 - p\left(\frac{\sqrt{3p}}{3}\right) - q = 0 \Rightarrow$$

$$-2p\sqrt{3p} = 9q \Rightarrow (-2p\sqrt{3p})^2 = (9q)^2 \Rightarrow 4p^3 = 27q^2 \Rightarrow 4p^3 - 27q^2 = 0.$$

Analogamente,

$$f\left(-\frac{\sqrt{3p}}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4p^3 - 27q^2 = 0.$$

470. $x^3 - 2x^2 + x + m - 1 = 0;\ f^{(1)}(x) = 3x^2 - 4x + 1;\ f^{(2)}(x) = 6x - 4.$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla. Então:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}.$$

I) $f(1) = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1;\ f^{(2)}(1) = 2 \neq 0$

II) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 27m - 23 = 0 \Rightarrow m = \frac{23}{27};\ f^{(2)}\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \neq 0.$

471. $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1 = 0;\ f^{(1)}(x) = 3x^2 + 2ax + 3;$

$f^{(2)}(x) = 6x + 2a;\ f^{(3)}(x) = 6 \neq 0.$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz tripla, ou seja:

$$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{3}.$$

I) $f^{(1)}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow -a^2 + 9 = 0 \Rightarrow a = \pm 3.$

II) $f\left(-\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2a^3 - 27a + 27 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ ou $\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$

De (I) e (II), $a = 3$.

472. $x^4 - px - q = 0;\ f^{(1)}(x) = 4x^3 - p;\ f^{(2)}(x) = 12x^2.$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla. Então:

$$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - p = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{p}{4}}.$$

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right) = 0 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right)^4 - p\cdot\sqrt[3]{\frac{p}{4}} - q = 0 \Rightarrow$$

$$\left(-3p\cdot\sqrt[3]{\frac{p}{4}}\right)^3 = (4q)^3 \Rightarrow 27p^4 + 256q^3 = 0$$ e, portanto, $27p^4 + 256q^3 = 0$

é a condição do problema e $x = \sqrt[3]{\frac{p}{4}}$ é a raiz.

473. $f(x) = x^4 + mx^2 + 8x - 3 = 0;\ f^{(1)}(x) = 4x^3 + 2mx + 8;$

$f^{(2)}(x) = 12x^2 + 2m;\ f^{(3)}(x) = 24x.$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = f^{(2)}(r) = 0$ e $f^{(3)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz tripla. Então:

$$f^{(2)}(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 2m = 0 \Rightarrow x = \pm i\frac{\sqrt{6m}}{6}$$

I) $f^{(1)}\left(i\frac{\sqrt{6m}}{6}\right) = 0 \Rightarrow 4\left(i\frac{\sqrt{6m}}{6}\right)^3 + 2mi\frac{\sqrt{6m}}{6} + 8 = 0 \Rightarrow$

$$mi\sqrt{6m} = -36 \Rightarrow m^3 = -6^3 \Rightarrow m = -6.$$

Analogamente,

$$f\left(-i\frac{\sqrt{6m}}{6}\right) = 0 \Rightarrow m = -6.$$

Temos: $x = \pm i\frac{\sqrt{6m}}{6} = \pm 1$ e $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0.$

II) $f(1) = 0$ e $f(-1) \neq 0$. Aplicando Briot:

1	0	−6	8	−3	1
1	1	−5	3	0	1
1	2	−3	0		1
1	3	0			

recaímos em $x + 3 = 0$ e daí $x = -3$ e, portanto,

$S = \{1, -3\}$ e $m = -6$.

474. $f(x) = x^3 + mx - 2 = 0;\ f^{(1)}(x) = 3x^2 + m;\ f^{(2)}(x) = 6x.$

Se existir um número r tal que $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$, teremos uma raiz dupla. Então:

$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + m = 0 \Rightarrow x = \pm i \cdot \dfrac{\sqrt{3m}}{3}$

$f\left(i\dfrac{\sqrt{3m}}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(i\dfrac{\sqrt{3m}}{3}\right)^3 + mi\dfrac{\sqrt{3m}}{3} - 2 = 0.$

$(mi\sqrt{3m})^2 \Rightarrow 9^2 \Rightarrow m = -3 \Rightarrow x = \pm 1$; $f(x) = x^3 - 3x - 2$; $f(1) \neq 0$ e $f(-1) = 0$. Aplicando Briot:

1	0	−3	−2	−1
1	−1	−2	0	−1
1	−2	0		

recaímos em $x - 2 = 0$ ou $x = 2$. Portanto, $S = \{-1, 2\}$.

475. $ax^n + b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.
Vamos supor que a equação admita uma raiz dupla r. Temos $f(x) = 0$ e $f^{(1)}(x) = 0$. Então:
I) $f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow nax^{n-1} = 0 \Rightarrow x = 0$, pois $a \neq 0$.
II) $f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^n + b = 0 \Rightarrow b = 0$, o que é absurdo, pois $b \neq 0$.
Portanto, a equação não tem raízes múltiplas.

476. $x^3 - ax + b = 0$, $ab \neq 0$.
Seja r a raiz dupla. Então: $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$ e $f^{(2)}(r) \neq 0$.

$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3a}}{3}.$

$f\left(\dfrac{\sqrt{3a}}{3}\right) = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3a}}{3}\right)^3 - a \cdot \dfrac{\sqrt{3a}}{3} + b = 0 \Rightarrow 2a\sqrt{3a} = 9b \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a^3 - 27b^2 = 0$ e, portanto, a é positivo.

477. $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + k = 0.$
Seja r a raiz dupla. Então $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$. Temos:
$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 0 \Rightarrow$
$x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow$
$x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 2$.
$f(-1) = 0$ (condição do problema) $\Rightarrow k - 19 = 0 \Rightarrow$
$k = 19$ e $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 19 = 0$. Aplicando Briot:

3	−8	−6	24	19	−1
3	−11	5	19	0	−1
3	−14	19	0		

recaímos em $3x^2 - 14x + 19 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm 2i\sqrt{2}}{3}.$

$S = \left\{-1, \dfrac{7 + 2i\sqrt{2}}{3}, \dfrac{7 - 2i\sqrt{2}}{3}\right\}.$

478. a) Ver item 91, página 112.
b) $f(x) = 2x^3 - \text{sen}\,\alpha x^2 + \cos^3\alpha = 0$
$f^{(1)}(x) = 6x^2 - 2\,\text{sen}\,\alpha x$
Se f tiver uma raiz múltipla r, então $f(r) = f^{(1)}(r) = 0$.
Então:
$f^{(1)}(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6\,\text{sen}\,\alpha x = 0 \Rightarrow x(x - \text{sen}\,\alpha) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \text{sen}\,\alpha$

I) $f(0) = 0 \Rightarrow \cos^3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II) $f(\text{sen}\,\alpha) = 0 \Rightarrow -\text{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Se $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, vimos que a equação admite uma raiz dupla e, em conseqüência, uma terceira raiz simples.

Se $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a equação terá três raízes simples.

479. A) $z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (I)

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$ (II)

$1 - z = (1 - x) - iy \Rightarrow |1 - z| = \sqrt{(1 - x)^2 + y^2}$ (III)

Temos:

de (I) e (III): $(1 - x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}.$

de (I) e (II): $\dfrac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \pm i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Portanto: $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

B) $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
I) $P(x)$ é divisível por $P'(x)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 + & ax^2 & + \;\; bx & + \; c & 3x^2 + 2ax + b \\
\cline{5-5}
-x^3 - & \dfrac{2ax^2}{3} & - \;\; \dfrac{bx}{3} & & \dfrac{x}{3} + \dfrac{a}{9} \\
\hline
& \dfrac{ax^2}{3} & + \;\; \dfrac{2bx}{3} & + \; c & \\
& -\dfrac{ax^2}{3} & - \;\; \dfrac{2a^2x}{9} & - \; \dfrac{ab}{9} & \\
\hline
& & \dfrac{6b - 2a^2}{9}x & + \; \dfrac{9c - ab}{9} &
\end{array}
$$

$(6b - 2a^2)x + 9c - ab = 0 \Rightarrow$
$$\begin{cases} 6b - 2a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 3b \quad (1) \\ 9c - ab = 0 \quad (2) \end{cases}$$

II) $P'(x)$ é divisível por $x - 1$:

3	2a	b	1
3.	2a + 3	2a + b + 3	

$2a + b + 3 = 0 \quad (3)$

De (1), (2) e (3), temos que: $a = -3$, $b = 3$ e $c = -1$.

480. Seja k_i o coeficiente do termo em $x^{180 - i}$.
Temos:
$k_i = (\text{sen } 1^\circ + \cos 1^\circ)(\text{sen } 2^\circ + \cos 2^\circ) \ldots (\text{sen } i^\circ + \cos i^\circ)$.
Desta forma, para $i \geqslant 135$, um dos fatores que compõem k_i é $\text{sen } 135^\circ + \cos 135^\circ = 0$, ou seja, $k_i = 0$. Então os termos que têm coeficiente não nulo vão desde x^{180} até $x^{180 - 134} = x^{46}$.
Conclusão: a multiplicidade de zero como raiz do polinômio é *46*.

481.

	$x + 6$	$\frac{x}{20} - \frac{3}{20}$
$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$	$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	$20x^2 + 20x - 40 = r_1$
$\underbrace{20x^2 + 20x - 40}_{r_1}$	0	

$$\text{mdc}(f, g) = \text{mdc}(g, r_1) = \frac{1}{20}r_1 = x^2 + x - 2$$

482.

	$x^2 - 2x + 4$
$x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2$	$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$
$\underbrace{-6x^3 - 13x^2 + 3x + 10}_{r_1}$	

	$-\frac{x}{6} - \frac{11}{36}$
$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$	$-6x^3 - 13x^2 + 3x + 10 = r_1$
$\underbrace{\frac{19}{36}x^2 + \frac{19}{12}x + \frac{19}{18}}_{r_2}$	

	$-\frac{216}{19}x + \frac{180}{19}$
$-6x^3 - 13x^2 + 3x + 10$	$\frac{19}{36}x^2 + \frac{19}{12}x + \frac{19}{18} = r_2$
0	

$$\text{mdc}(f, g) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \frac{36}{19}r_2 = x^2 + 3x + 2.$$

483. $f = (x^2 - 1)^2 \cdot (x + 1)^3 = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^5$
$g = (x^3 + 1)(x - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)$, então
$\text{mdc}(f, g) = (x + 1)(x - 1)$.

484. Sejam q_1 e q_2 os quocientes da divisão, respectivamente, de f e g por $(x - a)^p$; q e r o quociente e o resto da divisão de f por g. Então:
$f = q_1 \cdot (x - a)^p$; $g = q_2 \cdot (x - a)^p$; $f = qg + r \Rightarrow$
$r = f - qg = q_1(x - a)^p - qq_2(x - a)^p =$
$= (x - a)^p(q_1 - qq_2)$ e, portanto, o resto da divisão de f por g também é divisível por $(x - a)^p$.

485. $f = 5(x - 2)^2(x - 4)^2(x - 3)^4$
$g = 4(x - 2)(x - 4)^4(x + 1)$
$\text{mdc}(f, g) = (x - 2)(x - 4)^2$.

486. $f = (x^2 - 1)^3(x + 1)^2 = (x - 1)^3 (x + 1)^5$
$g = (x - 1)^4(x + 1)^4$
$\text{mdc}(f, g) = (x - 1)^3(x + 1)^4$.

488.

	$x + 6$	$\frac{x}{20} - \frac{3}{20}$
$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$	$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	$20x^2 + 20x - 40$
$20x^2 + 20x - 40$	0	

então, $\text{mdc}(f, g) = x^2 + x - 2$ e as raízes comuns a f e g são *1* e -2. $f(3) = 0$; $f(3) \neq 0$, $g(-1) \neq 0$ e $f(-1) = 0$; portanto, as raízes não comuns são: -1 de f e 3 de g.

489. $f = x^3 - ax^2 - b^2x + ab^2 = (x^2 - b^2)(x - a) = (x + b)(x - b)(x - a)$
$g = x^3 + bx^2 - a^2x - a^2b = (x^2 - a^2)(x + b) = (x + a)(x - a)(x + b)$
Temos, então: $\text{mdc}(f, g) = (x - a)(x + b)$ e, portanto, as raízes comuns são a e $-b$.

490. $f = x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
$g = x(x^2 + 1)$
$h = x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x^2 + 1)(x - 1)$

Então, mdc(f, g, h) $= x^2 + 1$.
Raízes comuns: i e $-i$ (raízes do mdc).

491. As raízes de $g(x) = x^2 - 3x + 2$ são 1 e 2.
Impondo que sejam raízes de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + a$, temos:
$f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 - 4 + a = 0 \Rightarrow a = 6$
$f(2) = 0 \Rightarrow 8 - 12 - 8 + a = 0 \Rightarrow a = 12$
Conclusão: $a = 6$ ou $a = 12$.

492. $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
$Q(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = P'(x)$
Se mdc(P(x), Q(x)) $= x - \alpha$, então α é raiz de $P(x)$ e de $Q(x)$; portanto, α pode ser raiz dupla de $P(x)$.

493. Seja $f = x^{14} - 2x^{13} + x^{12}$ e $g = x^2 - 1$. Então:
$f = x^{12}(x-1)^2$
$g = (x+1)(x-1)$
mmc (f, g) $= x^{12}(x-1)^2(x+1) = x^{15} - x^{14} - x^{13} + x^{12}$
mdc (f, g) $= x - 1$.

494. $f = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
$g = (x-1)^2$
$h = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$
Então:
mmc(f, g, h) $= (x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)$
mdc(f, g, h) $= x - 1$.

497. $$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{2(x+1) + 3(x-1) - 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x-2}{x^2-1}$$

501. $$\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{3x-3}{x^2-1} - \frac{2x+4}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+1}$$
$$\frac{1 + 3(x+1) - 2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2}.$$

502. $$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)^3} + \frac{1}{(x-1)^3(x-2)^2} = 0$$
Multiplicando ambos os membros por $(x-1)^3(x-2)^3$, temos:
$(x-1) + (x-2) = 0$
$2x - 3 = 0$
$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

504. $$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x+1)} \quad (x \neq \pm 1)$$
Então: $$\frac{x}{x^2-1} = \frac{a(x+1)}{x^2-1} + \frac{b(x-1)}{x^2-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + (a-b)}{x^2-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

505. $$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \equiv \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)}{(x-1)(x^2+1)}.$$ Então:
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C - B = 0 \\ A - C = 1 \end{cases}$$
Resolvendo o sistema de equações, temos: $A = \frac{1}{2}$; $B = C = -\frac{1}{2}$.

506. $$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1} = \frac{(\alpha+\beta)x + (\beta-\alpha)}{(x+1)(x-1)}$$
Temos:
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

507. a, b, c são raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, então: $a = 0$; $b = 2$ e $c = 3$.
$$\frac{6-5x}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x-0} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{(A+B+C)x^2 - (5A+3B+2C)x + 6A}{x^3-5x^2+6x}$$
Temos:
$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -(5A + 3B + 2C) = -5 \\ 6A = 6 \end{cases}$$
Resolvendo o sistema de equações encontramos: $A = 1$; $B = 2$ e $C = -3$.
Portanto, alternativa *c*.

508. $$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{(2A+2B)n + (A-B)}{(2n-1)(2n+1)}$$
decorre $2A + 2B = 0$ e $A - B = 1$. Resolvendo esse sistema, vem
$A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Vale, portanto, a identidade:
$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

Aplicação:

$$S = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{18}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

Para n arbitrariamente grande, $\frac{1}{2(2n+1)}$ tende a zero e S tende a $\frac{1}{2}$.

509. $f = x^3 - 2x^2 + 1$; $g = x^2 + x - 2$

$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -2x^2 & & +1 & x^2 + x - 2 \\ \cline{5-5} -x^3 & -x^2 & +2x & & x - 3 = q(x) \\ \cline{1-4} & -3x^2 & +2x & +1 & \\ & 3x^2 & +3x & -6 & \\ \cline{2-4} & & 5x & -5 = r(x) & \end{array}$$

Temos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - q(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + 2A - B}{x^2 + x - 2}$$

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ 2A - B = -5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema: $A = 0$ e $B = 5$ e, portanto, o valor de B é 5.

510. $P(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$ com $x_1 \neq x_0$

$Q(x) = a'(x - x_0)(x - x_2)$ com $x_2 \neq x_0$

Pelas relações de Girard, temos:

$$x_0 + x_1 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_0 + x_2 = -\frac{b'}{a'}$$

e decorre daí:

$$x_1 = -\frac{b}{a} - x_0 \text{ e } x_2 = -\frac{b'}{a'} - x_0.$$

Temos, então:

$$P(x) = a(x - x_0)\left(x + \frac{b}{a} + x_0\right)$$

$$Q(x) = a'(x - x_0)\left(x + \frac{b'}{a'} + x_0\right)$$

$$\text{mmc}(P, Q) = (x - x_0)\left(x + \frac{b}{a} + x_0\right)\left(x + \frac{b'}{a'} + x_0\right).$$

511. Vimos no item 89, na página 108, que todo polinômio pode ser colocado na forma de um produto de fatores do 1º grau. Então vamos escrever f e g como produtos de fatores da forma $x - r_i$, em que r_i é raiz do polinômio f com multiplicidade m_i e de g com multiplicidade n_i:

$f = (x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}(x - r_3)^{m_3} \dots (x - r_p)^{m_p}$

$g = (x - r_1)^{n_1}(x - r_2)^{n_2}(x - r_3)^{n_3} \dots (x - r_p)^{n_p}$

Temos:

$\text{mdc}(f, g) = (x - r_1)^{\alpha_1}(x - r_2)^{\alpha_2}(x - r_3)^{\alpha_3} \dots (x - r_p)^{\alpha_p}$ em que $\alpha_i = \min\{m_i, n_i\}$

$\text{mmc}(f, g) = (x - r_1)^{\beta_1}(x - r_2)^{\beta_2}(x - r_3)^{\beta_3} \dots (x - r_p)^{\beta_p}$ em que $\beta_i = \max\{m_i, n_i\}$

então $f \cdot g$ e $\text{mdc}(f, g) \cdot \text{mmc}(f, g)$ são produtos formados por fatores do tipo $(x - r_i)^{m_i + n_i}$, idênticos dois a dois, e portanto iguais.